Вопрос **Инфо**

Уважаемые участники!

Олимпиадное задание по направлению «Теория игр» состоит только из инвариантной части. Это означает, что вам нужно постараться решить все задачи и ответить на все вопросы, чтобы претендовать на призовые места.

Все задания выполняются в этой системе: решения вносите в специальное поле для ответов. Если решение требует указания формул, графиков и схем, можно выполнить решение на чистых листах А4 и загрузить фото/скан работы в конце состязания (на это у вас будет 15 минут).

При выполнении заданий можно использовать черновик (в качестве черновика разрешено использовать чистые листы бумаги. При необходимости можете делать черновые пометке в окне ответов внутри тестирующей системы), но на проверку он не предъявляется. Использование сторонних ресурсов и справочных материалов строго запрещено.

В последние 15 **минут, когда таймер подсветится красным, выполнять задания запрещено**: **это время отведено на загрузку файлов**. Если справитесь с заданиями раньше, можете не дожидаться последних 15 минут, а начинать загружать файлы и завершать работу, но с момента начала фотографирования/сканирования делать пометки в работе уже не разрешается.

Верим в ваш успех!

Инструкции от составителей заданий:

- Условие каждой задачи приведено на русском и английском языке. Решение может быть представлено как на русском, так и на английском языке. Никаких дополнительных баллов, впрочем, как и штрафов, за решение на английском языке не предусмотрено.
- Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк – распознаваемым. Ответы на качественные вопросы должны быть убедительно аргументированы, но длинные рассуждения, не относящиеся к сути дела, могут негативно повлиять на оценку.
- Все шаги в решении должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе.
- Если приведенное решение является неверным, перечеркните его (перечеркнутое решение не проверяется) и приведите корректную версию.
- При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, а апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.

Вопрос **1**

Балл: 10,00

Секрет четности

Теория игр содержит в себе много красивых и неочевидных фактов. Одно доказательство существования равновесия Нэша чего стоит! Есть и другие примеры неочевидных теорем. Роберт Уилсон доказал в 1971 году, что почти все конечные игры имеют нечетное число равновесий Нэша. Про эту теорему, смысл словосочетания почти все и интуитивную интерпретацию доказательства мы расскажем в файле с решениями задач олимпиады. К счастью, от участников олимпиады не требуется доказать эту сложную теорему. В рамках этой задачи мы лишь покажем, что в формулировке теоремы нельзя заменить почти все на все.

Приведите пример игры на двух игроков с конечным числом чистых стратегий, которая имеет:

1. бесконечное число равновесий Нэша;
2. конечное четное число равновесий Нэша.

Не забудьте показать, что ваш пример подходит под условие!

Примечание: Равновесием Нэша мы считаем как равновесие в чистых стратегиях, так и равновесие в смешанных стратегиях.

The Secret of Evenness

Game theory contains many beautiful and non-obvious facts, i.e. the proof of the existence of the Nash equilibrium. There are other examples of non-obvious theorems. In 1971, Robert Wilson proved that almost all finite games have an odd number of Nash equilibria. We will tell the meaning of the phrase almost everything and the intuitive interpretation of the proof in the file with solutions to the problems of the Olympiad. Fortunately, the participants of the Olympiad are not required to prove this complex theorem. We ask you only to show that in the formulation of the theorem it is impossible to replace almost everything with everything.

Give an example of a two-player game with a finite number of pure strategies that has:

1. an infinite number of Nash equilibria;
2. a finite even number of Nash equilibria.

Don't forget to show that your example fits the condition!

Note: Nash equilibrium can be both in pure strategies and in mixed strategies.

Вопрос 2

Балл: 20,00

Города

Города — игра, в которой игроки по очереди называют город, название которого начинается на ту букву, которой оканчивается название предыдущего города. Первый игрок в свой первый ход может назвать любой город. Нельзя называть города, которые были названы ранее любым из игроков. Проигрывает игрок, который не может сделать ход.

Друзья А и Б живут в стране Абабба. Они решили сыграть в города, причем они договорились использовать в игре только города своей страны. Сказочная страна

Абабба примечательна тем, что в ее алфавите есть только две буквы: А и Б. Друзья отлично знают географию своей страны:

- есть a городов, которые начинаются на А и заканчиваются на А

- есть b городов, которые начинаются на А и заканчиваются на Б

- есть c городов, которые начинаются на Б и заканчиваются на А

- есть d городов, которые начинаются на Б и заканчиваются на Б

a, b, c, d - целые неотрицательные числа. Первый ход делает игрок А. Опишите множество всех (a, b, c, d), при которых у игрока Б есть выигрышная стратегия.

Shiritori

Cities (shiritory, jielong) is a game in which players announce a city whose name begins with the letter that ends with the previous city's name in turn. The first player may name any city on her first turn. You cannot name cities that were previously named by any of the players. The player who cannot make a move loses.

Friends A and B live in country Ababba. They decide to play cities, and they agree to use only the cities of their country in the game. The fabulous country of Ababba is notable for the fact that there are only two letters in its alphabet: A and B. Friends know the geography of their country very well:

- there are a cities that start with A and end with A

- there are b cities that start with A and end with B

- there are c cities that start with B and end with A

- there are d cities that start with B and end with B

a, b, c, d are non-negative integers. Player A makes the first move. Describe the set of all (a, b, c, d) for which player B has a winning strategy.

Вопрос 3

Балл: 20,00

Медвежий рынок

Есть N медведей и k<N ульев, каждый медведь n имеет какой-то вес w_n>0, и каждый улей содержит какую-то массу m_k>0 мёда. Каждый медведь выбирает один из ульев, и после этого мёд каждого улья делится между выбравшими его медведями пропорционально их весу. Всегда ли в этой игре существует равновесие по Нэшу **в чистых стратегиях**? (То есть, такое разбиение медведей по ульям, что никто не хочет в одностороннем порядке поменять свой улей на другой.) Докажите или приведите контрпример.

Bear market

There are N bears and k<N hives, each bear n has some weight w_n>0, and each hive contains some mass m_k>0 of honey. Each bear chooses one of the hives, and after that the honey from each hive is divided among the bears that chose it in proportion to their weights. Does this game always have a Nash equilibrium **in pure strategies**? (That is such a division of bears into hives that no one wants to unilaterally change their hive for another.) Prove this or give a counterexample.

Вопрос 4

Балл: 20,00

Долгий бал(л)

В уездном городе NN на балу встречаются N кавалеров и N дам. У всех кавалеров и дам строгие предпочтения относительно партнеров. Для всех кавалеров и дам танцевать хотя бы с кем-то лучше, чем стоять в одиночестве.

Во время танца определение пар происходит следующим образом. На первом круге приглашений каждый кавалер приглашает свою “первую” даму (ту, которая нравится ему больше всего). Дама выбирает из всех приглашений лучшее и отказывает остальным. Однако она не спешит с ответом лучшему из пригласивших, ожидая, что в будущем она может получить приглашение от более желанного кавалера. На втором круге каждый кавалер, получивший отказ идёт к своей “второй” даме (лучшей, которая ещё не отказала), и снова каждая дама выбирает из всех приглашений лучшее и отказывает остальным, И так далее пока все не разобьются на пары.

Так начиналась задача 4 финального этапа Открытой Олимпиады ВШЭ по теории игр 2017. Нужно было сравнить два способа формирования пар. В нашем ремейке описан один из способов.

Этот способ формирования пар эффективный, но насколько он быстрый? Ведь пока кавалеры ходят от одной даме к другой, может закончиться музыка!
Пусть N=3.

1. Докажите, что пяти кругов достаточно, чтобы сформировать все три пары.

2. Приведите пример предпочтений, при которых все пары будут сформированы только на пятый круг.

Пусть N теперь произвольное.

3. Обозначим через T(N) максимальное число шагов, которое может потребоваться на то, чтобы N кавалеров и N дам разбились на пары. Оцените T(N) сверху, чем точнее тем лучше.

4. Тот же вопрос про оценку снизу.

Long dance

In the county town NN, N gentlemen and N ladies meet at a ball. All gentlemen and ladies have strict preferences regarding partners. For all gentlemen and ladies, dancing with at least someone is better than standing alone. During the dance, forming pairs occurs as follows. On the first round of invitations, each gentleman invites his “first” lady (the one that he likes the most). The lady chooses the best of all the invitations and refuses the rest. However, she is in no hurry to accept the best of the invitees, expecting that in

In the future, she may receive an invitation from a more prefferable gentleman. On the second round, each cavalier who has received a refusal goes to his ”second” lady (the best one who has not yet refused), and again each lady chooses the best from all the invitations and refuses the rest, and so on until everyone is divided into pairs.

This is how the task of the 4th final stage of the HSE Open Olympiad in Game Theory 2017 began. It was necessary to compare two methods of forming pairs. Our remake describes one of the ways. This method is efficient, but how fast is it? After all, while gentlemen go from one lady to another, the music may end!

Let N=3.

1. Prove that five rounds are enough to form all three pairs.
2. Give an example of preferences under which all pairs will be formed ecactly on the fifth round.

Let N now be arbitrary.

3. Denote by T(N) the maximum number of rounds that may be required for N gentlemen and N ladies to pair up. Estimate T(N) from above, the more accurate the better.
4. The same question about the estimate from below.

Вопрос 5

Балл: 15,00

Лучше быть здоровым и умным

Роберт Ауман (Игрок 1), Ариэль Рубинштейн (игрок 2) и Роджер Майерсон (игрок 3) рациональны в вопросах здравоохранения. Как только на рынок выпускается новая экспериментальная вакцина от ковида, каждый из них должен решить, достаточно ли она безопасна для того, чтобы привиться. Проблема в том, что имеющейся у каждого информации недостаточно для того, чтобы быть уверенным наверняка. Изначально известно, что возможны два состояния мира: $w = S$ (то есть прививка безопасна) и $w = D$ (то есть прививка может иметь отложенные побочные эффекты). При этом априорная вероятность того, что $w = S$, равна $p \geq \frac{1}{2}$. В добавок, каждый игрок $i = 1, 2, 3$ обладает частной информацией $m_i \in \{S, D\}$, почерпнутой от тайных уникальных экспертов из интернета, которая верна с вероятностью $q > p$. То есть если прививка действительно безопасна, то $m_i = S$ с вероятностью q и $m_i = D$ с вероятностью $1 - q$. Более того, при заданном w случайные величины сигналов статистически независимы.

1. Пусть игроки принимают решения, привиться или нет, в такой очередности: Сначала Ауман выбирает $a_1 \in \{\text{прививаться, непрививаться}\}$, потом Рубинштейн выбирает a_2, потом Майерсон выбирает a_3, и причем каждый сразу пишет пост о своем решении в соцсети, который читают все другие перед собственным решением. Каждый игрок хочет одного: не ошибиться и сделать прививку, если она безопасна, но не делать, если опасна, – в таком случае он получает выигрыш, равный 1 (и выигрыш, равный 0 в противопопожном случае). Найдите, как выбор Рубинштейна будет зависеть от m_2 и a_1.

2. Найдите, как выбор Майерсона будет зависеть от a_1, a_2 и m_3.

3. Пусть имеются N топовых мировых специалистов по теории игр, все они знакомы и дружат в социальной сети. При каких условиях на сигналы происходит информационный каскад: если $m_1 = S$, то в равновесии $a_1 = a_2 = \ldots = a_N$ прививаться?

It's better to be healthy and smart

Robert Aumann (Player 1), Ariel Rubinstein (Player 2), and Roger Myerson (Player 3) are rational about healthcare. As soon as a new experimental covid vaccine is released to the market, each of them has to decide if it is safe enough to participate in vaccination. The problem is that the information available to everyone is not enough to be sure in its safety. Initially, it is known that two states of the world are possible: $w = S$ (that is, the vaccine is safe) and $w = D$ (that is, the vaccine can have delayed side effects). A prior probability that $w = S$ is equal to $p \geq \frac{1}{2}$. In addition, each player $i = 1, 2, 3$ obtains a private signal $m_i \in \{S, D\}$, coming from a secret expert from the Internet, which is correct with probability $q > p$. This means that if the vaccine is really safe, then $m_i = S$ with probability q and $m_i = D$ with probability $1 - q$. Moreover, for a given w, the random variables of the signals are statistically independent.

1. Let the players decide whether to vaccinate or not, in this order: first, Auman chooses $a_1 \in \{vaccinate, not\}$, after that Rubinstein chooses a_2, after that Myerson chooses a_3, and each player immediately writes a post about his decision in the social network, which is read by all the others before their decisions. Each player wants not to make a mistake and to vaccinates if it is safe, but not to do it if it is dangerous, in this case he gets a payoff equal to 1 (and a payoff equal to 0 otherwise). Find how Rubinstein's choice depends on m_2 and a_1.
2. Find how Myerson's choice will depend on a_1, a_2 and m_3.

3. Let there be N of the world's top game theorists, they all know each other and are friends on a social network. Under which condition on signals an information cascade occurs: if $m_1 = S$, then in equilibrium $a_1 = a_2 = \ldots = a_N$ vaccinate?

Вопрос 6

Балл: 15,00

Неправильный мёд

Винни-Пух, Пятачок и ослик Иа-Иа сидят в домике Винни в изоляции от Ковида, щелкают орешки (у каждого их по мешку), и звонят в фирму по доставке еды. Им говорят, что (в обмен на предлагаемый друзьями в виде оплаты надувной шарик) курьер может им доставить что-то одно из списка: или кочан Капусты, или корзинку Брюквы, или баночку Меда. Предпочтения друзей таковы: Винни ценит Мед = 10 орешков > Брюквы = 5 орешков > Капусты = 0 орешков, Пятачок ценит Брюкву > Капусты > Меда = 0 орешков, Иа-Иа ценит Капусту > Меда > Брюквы = 0 орешков, и каждый понимает предпочтения свои и друзей.

Они собираются голосовать – что из трех альтернатив заказать – по правилу относительного большинства: победит альтернатива, набравшая больше голосов, и назвать можно только одну, а при равенстве голосов бросается жребий с равными вероятностями. Винни говорит, что раз домик его, и шарик его, то у него должно быть хотя бы полтора голоса, а у них по одному, и друзья согласны. Иа-Иа говорит, что раз он старший, то он назовет свой выбор первым, Пятачок после него, а потом назовет младший – Винни, и друзья согласились. Тут Винни подумал и объявил, что вместо голосования он (раз уж последний) подбросит кубик с тремя сторонами - равновероятно на Брюкву, Капусту, Мед.

1. Рационально ли Винни-Пух поступил - отказался от выбора последним - и почему?

2. По сравнению с этим его случайным выбором, сколько бы Винни-Пух отдал ведущему орешков за присуждение ему, Винни, права первым назвать выбор?

Wrong honey

Winnie the Pooh, Piglet and Eeyore are sitting in Winnie's house in isolation from Covid, cracking nuts (each has a bag of them), and calling a food delivery company. They are told that (in exchange for a balloon offered by friends as payment) the courier can deliver one of the items from the list: either a head of Cabbage, or a basket of Rutabaga, or a jar of Honey. Friends' preferences are: Winnie values Honey = 10 nuts > Rutabaga = 5 nuts > Cabbage = 0 nuts, Piglet values Rutabaga > Cabbage > Honey = 0 nuts, Eeyore values Cabbage > Honey > Rutabaga = 0 nuts, and everyone understands everyone preferences.

They are going to vote which of the three alternatives to order according to the rule of relative majority: the alternative with the most votes will win, and one can vote only for the unique alternative, and if the votes are equally distributed, lots are drawn with equal probabilities. Winnie says that since they are in his house and the balloon is his, then he should have at least one and a half votes, while the others have one each, and the friends agree. Eeyore says that since he is the eldest, he will name his choice first, Piglet after him, and then the youngest Winnie, and the friends agreed. Then Winnie thought and announced that instead of voting, he would throw a die with three sides equally likely on Rutabaga, Cabbage, Honey.

1. Did Winnie the Pooh act rationally when he refuses the choice and behaves randomly, and why?

2. Compared to this random choice, how many nuts would Winnie the Pooh give the host for giving him, Winnie, the first order to make the choice?