Решения задач олимпиады "Высшая лига" по направлению "Математика"

Задача 1. *Комплексная матрица* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *подобна матрице* A^k *для любого целого положительного* k. *Пусть* $E \in M_n(\mathbb{C})$ *– единичная матрица. Верно ли что матрица* $A - E$ *является нильпотентной, то есть существует* $N \in \mathbb{N}$ *такое, что* $(A-E)^N = 0$*?*

Решение. Если не предполагать, что матрица A является невырожденной, то $A = 0$ является контрпримером. Действительно, $A^k = 0 = A$. При этом $(A - E) = -E$ не является нильпотентной матрицей.

Предположим, что матрица A является невырожденной. Пусть

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_l, 1 \le l \le n$$

собственнные значения матрицы A. Подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения, а матрица A^k имеет собственные значения $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_l^k$. Возьмем любое собственное значение λ_i и рассмотрим последовательность $\lambda_i, \lambda_i^2, \lambda_i^3, \ldots$. Из выше сказанного следует, что все элементы этой последовательности являются собственными значениями матрицы A. Значит, существуют $l_1 \neq l_2$ такие, что $\lambda_i^{l_1} = \lambda_i^{l_2}$, поэтому λ_i является корнем из 1.

Пусть m — наименьшее общее кратное порядков всех этих корней. Тогда ясно, что все собственные значения матрицы A^m равны 1, а следовательно, все собственные значения матрицы A также равны 1. Отсюда следует, что у матрицы $A - E$ Жорданова нормальная форма – строго-верхнетреугольна, а значит матрица $A - E$ – нильпотентна.

□

Задача 2. *Рассмотрим куб со строной 1 в* $\mathbb{R}^3$. *Точка* A *выбирается случайным образом внутри куба. Найдите математическое ожидание расстояния от точки* A *до поверхности куба.*

Решение. Обозначим случайную величину – расстояние до поверхности единичного куба через ξ. Заметим, что $0 \le \xi \le \frac{1}{2}$. Найдем функцию распределения этой случайной величины:

$$F(x) = P(\xi \le x) = 1 - P(\xi > x)$$

Заметим, что геометрическое место точек, где расстояние до поверхности больше x - это в точности куб со стороной $2(\frac{1}{2} - x)$ и центром в $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Отсюда находим искомую вероятность:

$$P(\xi > x) = \frac{(2(\frac{1}{2} - x))^3}{1^3}$$

$$F(x) = 1 - 8(\frac{1}{2} - x)^3$$

Теперь найдем плотность этой случайной величины:

$$f(x) = F'(x) = (1 - 8(\frac{1}{2} - x)^3)' = 24\left(\frac{1}{2} - x\right)^2.$$

Отсюда считаем математическое ожидание:

$$\mathbb{E}\xi = \int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot 24\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 dx = \frac{1}{8}$$

$\square$

Задача 3

Задача 3. *Функция $x(t) = e^{\frac{1}{t}} + \frac{1}{t}$ на области своего определения является решением дифференциального уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{1}$$

причём $f(x)$ – непрерывна.

а) Существует ли у этого уравнения решение, определённое на всей прямой?

б) Опишите все решения дифференциального уравнения, определённые на всевозможных интервалах.

Решение. Исследуем функцию $\varphi(t) = e^{\frac{1}{t}} + \frac{1}{t}$.

Область определения это $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Заметим, что

$$\lim_{t\to 0+} \phi(t) = \lim_{t\to 0+}\left(e^{\frac{1}{t}} + \frac{1}{t}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{t\to 0-} \phi(t) = \lim_{t\to 0-}\left(e^{\frac{1}{t}} + \frac{1}{t}\right) = -\infty$$

$$\lim_{t\to \pm\infty} \phi(t) = \lim_{t\to \pm\infty}\left(e^{\frac{1}{t}} + \frac{1}{t}\right) = 1$$

Более того

$$\phi'(t) = \left(e^{\frac{1}{t}} + \frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}} - \frac{1}{t^2} \leq 0 \ \forall\ t \neq 0.$$

Таким образом, функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируемая строго убывающая функция на $(0, \infty)$ и $(-\infty, 0)$. Отсюда получаем, что функция φ биективно отображает промежутки $(-\infty, 0)$ на $(-\infty, 1)$ и $(0, +\infty)$ на $(1, +\infty)$.

Отсюда следует, что $\varphi(t)$ обратима и обратная функция $\varphi^{-1}(x)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ и имеет область значений $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

По условию задачи функция $x = \varphi(t)$ является решением дифференциального уравнения (1). Следовательно $\phi'(t) = f(\phi(t))$, то есть

$$-\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}} - \frac{1}{t^2} = f\left(e^{\frac{1}{t}} + \frac{1}{t}\right).$$

После подстановки $t = \varphi^{-1}(x)$ в последнее равенство получим:

$$f(x) = -\frac{1}{\left(\phi^{-1}(x)\right)^2} \cdot e^{\frac{1}{\phi^{-1}(x)}} - \frac{1}{\left(\phi^{-1}(x)\right)^2}, \ x \neq 1. \tag{2}$$

Отметим, что из того, что $\varphi^{-1}(x)$ непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, то из (2) следует, что $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

По условию задачи функция $f(x)$ непрерывна на всей оси, поэтому $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$. Используя (2), а также равенство $\lim_{x\to 1} \varphi^{-1}(x) = \mp\infty$, получим

$$f(1) = \lim_{x\to 1\pm}\left(-\frac{1}{\left(\varphi^{-1}(x)\right)^2} \cdot e^{\frac{1}{\varphi^{-1}(x)}} - \frac{1}{\left(\varphi^{-1}(x)\right)^2}\right) = 0.$$

Таким образом,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(\varphi^{-1}(x))^2} \cdot e^{\frac{1}{\varphi^{-1}(x)}} - \frac{1}{(\varphi^{-1}(x))^2}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Отсюда следует, что $x = 1$ есть решение (1) определённое на $\mathbb{R}$.

Легко видеть, что $x = \varphi(t - t_0)$ является решением исходного уравнения для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ на любом интервале не содержащим точку t_0. Докажем, что на любом интервале (a, b), не содержащим t_0 любое решение имеет вид $x = \varphi(t - t_0)$ или $x = 1$.

Действительно, рассмотрим уравнение (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ (задачу Коши). Пусть $x_0 \neq 1$. В силу гладкости $f(x)$ на $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ в окрестности такой точки x_0 решение единственно (по теореме о существовании и единтсвенности решения). Но такое решение имеет вид $x = \varphi(t - (t_0 - t_1))$, где $t_1 = \varphi^{-1}(x_0))$. Таким образом, мы описали все решения, не принимающие значение 1.

Теперь пусть $x = \psi(t)$ есть решение (1), причём $\psi(t_0) = 1$. Тогда функция $\psi(t)$ определена и непрерывна на некотором интервале, содержащем точку t_0 и обязана на нём совпадать с постоянной функцией $x = 1$ (иначе она совпала бы с некоторым сдвигом функции $x = \varphi(t)$, что невозможно, так как $\varphi(t)$ не принимает значение 1). Таким образом, мы получаем

Ответ: а) $x = 1$ решение определённое на всей прямой;

б) На интревале (a, b): $x = e^{\frac{1}{t-t_0}} + \frac{1}{t-t_0}$, где $t_0 \notin (a, b)$ и $x = 1$. □

Задача 4. *Существует ли строго положительная непрерывная функция f на отрезке $[0, 2]$ такая, что для любого целого неотрицательного k число $\int\limits_0^2 f(x)x^k dx$ является целым?*

Решение. Предположим, что такая функция f существует. В этом случае, поскольку $\int\limits_0^2 f(x)x^k dx$ целые (в том числе и $\int\limits_0^2 f(x)dx$), то и для всякого многочлена P с целыми коэффициентами число $\int\limits_0^2 f(x)P(x)dx$ целое как сумма целых чисел. Рассмотрим последовательность чисел

$$x_k = \int\limits_0^2 f(x)(x-1)^{2k}dx, k > 0.$$

По вышесказанному, $x_k \in \mathbb{Z}$. С другой стороны,

$$x_k \leq \frac{2M}{2k+1},$$

где $M = \sup\limits_{x \in [0,2]} f(x)$ (такое число действительно существует так как f непрерывна на отрезке). Отсюда следует, что члены последовательности

$$\lim_{k \to \infty} x_k = 0,$$

что является противоречием. Ответ: такой функции не существует. □

Задача 5. *Пусть X — компактное топологическое пространство, $C(X)$ — пространство непрерывных функций на X со значениями в $\mathbb{R}$, снабженное нормой*

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|, f \in C(X).$$

Для произвольного компактного подмножества $K \subset C(X)$ определим функцию

$$g \colon X \to \mathbb{R}$$

правилом

$$x \mapsto \sup_{f \in K} f(x).$$

Обязательно ли непрерывна функция g (докажите или приведите контрпример)?

Решение. Заметим, что для любого $x \in X$ отображение

$$ev_x : C(X) \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x),$$

непрерывно. Следовательно, множество $ev_x(K)$ компактно и, в частности, ограничено, поэтому $g(x) < \infty$ и g действительно является функцией из X в $\mathbb{R}$.

Для непрерывности g необходимо и достаточно, чтобы для каждого $c \in \mathbb{R}$ множества $g^{-1}((c,+\infty))$ и $g^{-1}((-\infty,c))$ были открытыми. Открытость первого из них сразу следует изочевидного равенства

$$g^{-1}((c,+\infty)) = \bigcup_{f\in K} f^{-1}((c;+\infty))$$

Открытость второго множества докажем сперва в предположении, что K – конечно. В этом случае справедливо равенство

$$g^{-1}((-\infty,c)) = \bigcap_{f\in K} f^{-1}((-\infty,c))$$

что доказывает непрерывность g для конечного K.

Пусть теперь $K \subset C(X)$— произвольное компактное множество, и пусть $x \in g^{-1}((-\infty;c))$. Выберем такое $\varepsilon > 0$, что $g(x_0)+\varepsilon < c$. Пусть $\{f_1,\dots,f_n\}$ —- конечная ε-сеть в K. В силу доказанного выше, функция $h = sup_{1\le i\le n} f_i$ непрерывна. Заметим, что для любого $f \in K$ найдется такое $i \in \{1,\dots,n\}$, что $f \le f_i + \varepsilon$. Отсюда заключаем, что $f \le h+\varepsilon$. Поскольку это верно для любого $f \in K$, получаем неравенство $g \le h+\varepsilon$. С другой стороны, $h \le g$, поэтому $h(x_0)+\varepsilon < c$. В силу непрерывности h, существует такая окрестность U точки x_0, что $h(x)+\varepsilon < c$ для всех $x \in U$. Следовательно, для любого $x \in U$ справедливы неравенства $g(x) \le h(x)+\varepsilon < c$, поэтому $U \subset g^{-1}((-\infty,c))$. Таким образом, каждая точка множества $g^{-1}((-\infty,c))$ является его внутренней точкой, т.е. это множество открыто. $\square$

Задача 6. *Найдите количество точных комплексных представлений (с точностью до изоморфизма) группы S_4 размерности 2023. Напомним, что точное комплексное представление – это инъективный гомоморфизм групп*

$$S_4 \to GL_{2023}(\mathbb{C}).$$

Решение. Известно, что любое комплексное представление конечной группы является прямой суммой неприводимых. Опишем неприводимые представлений S_4. Их число равно числу классов сопряженности в S_4 – пяти. Имеется два одномерных представления:

$$\rho_1 : S_4 \to \mathbb{C}^\times, \sigma \mapsto 1$$

$$\rho_2 : S_4 \to \mathbb{C}^\times, \sigma \mapsto (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma},$$

которые не являются точными. Обозначим их через V_1 и V_2.

Заметим, что группа S_4 естественным образом действует на пространстве $\mathbb{C}^4$. Если e_1, e_2, e_3, e_4 – некоторый базис S_4, то $\sigma \cdot e_i = e_{\sigma^{-1}(i)}$. При этом подпространство $V_3 = \{\langle a,b,c,d\rangle \,|a+b+c+d=0\}$ – является неприводимым трёхмерным представлением S_4. Действительно, если U – подпредставление V_3, то пусть $u = \langle a,b,c,d\rangle \in U$. Без ограничения общности, можно считать, что $a \ne b$. Тогда $(12)\cdot u = \langle b,a,c,d\rangle$ и следовательно

$u-(12)u=(a-b)e_1-e_2 \in U$. Применив такое же рассуждение для $2,3$ и $2,4$ координат получим вектора $e_1-e_2, e_1-e_3, e_1-e_4 \in U$, следовательно $U=V_3$. Более того, V_3 – точное представление по конструкции.

Обозначим через V_4 тензорное произведение $V_3 \otimes V_2$. Легко видить, что тензорное произведение одномерного представления с точным неприводимым – точное неприводимое. Наконец, воспользуемся сюръективным гомомрфизмом $S_4 \to S_3$, чтобы получить действие S_4 на естевственном двухмерном неприводимом представлении S_3, что даёт последнее двумернео неприводимое представление V_5. Оно не точно по построению.

Пусть теперь V – 2023-мерное представление S_4. Разложим его в прямую сумму неприводимых

$$V=V_1^{\oplus k_1} \oplus V_2^{\oplus k_2} \oplus V_3^{\oplus k_3} \oplus V_4^{\oplus k_4} \oplus V_5^{\oplus k_5}.$$

Представление V – точно, если хотя бы одно из чисел k_3 или k_4 больше нуля.

Таким образом, число точных 2023-мерных представлений группы S_4 равно количеству решенй уравнения

$$2023=k_1+k_2+3k_3+3k_4+2k_5,$$

где k_i — целые неотрицательные и $k_3+k_4>0$. Пусть N – число решений. Тогда

$$N=\sum_{k=1}^{[n/3]} \#\{(k_1,k_2,k_5)|k_1+k_2+2k_5=n-3k; k_1,k_2,k_5 \geq 0\} \cdot \{(k_3,k_4)|k_3+k_4=k; k_3,k_4 \geq 0\} = \sum_{k=1}^{[n/3]} N'_{n-3k} \cdot (k+1).$$

Заметим, что

$$N'_m=\sum_{k_5=0}^{[m/2]} (m+1-2k_5) = [m/2] \cdot (m-[m/2]).$$

Подставим $m=n-3k$, получим:

$$N_{2023}=\sum_{k=1}^{674} \left[\frac{2023-3k}{2}\right] \cdot \left((2023-3k)-\left[\frac{2023-3k}{2}\right]\right) \cdot (k+1) = 38999707832.$$

□

Задача 7. *Упругая однородная балка постоянного сечения имеет длину L. Балка закреплена одним концом в вертикальной стене так, что в точке входа в стену балка горизонтальна. Линейная плотность балки ρ. На свободном конце балки закреплена точечная масса m. В приближении малой* *деформации плотность энергии упругой деформации балки дается выражением*

$$W(x) = \kappa \, \frac{(y'')^2}{2},$$

где $\kappa > 0$ известная константа, а значение гладкой функции $y(x)$ задает величину отклонения балки от горизонтали на расстоянии x от точки крепления. Определите форму деформированной балки, то есть, найдите явный вид функции $y(x)$. Балка находится в однородном вертикальном поле тяжести с ускорением свободного падения g.

Указание. *Напишите выражение для полной энергии деформированной балки в поле тяжести в виде функционала от ее формы $y(x)$. Истинная форма балки дает экстремум этого функционала.*

Решение. Зафиксируем декартову систему координат в вертикальной плоскости, поместив ее начало в точку входа балки в стену. Ось Ox направим горизонтально вдоль балки, ось Oy — вертикально вверх. В выбранной системе координат форма балки будет задаваться графиком некоторой функции $y(x)$. Условия крепления балки выражаются парой граничных условий на $y(x)$:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \tag{4}$$

В приближении малой деформации балки будем считать x-координату ее свободного конца равной L и, кроме того, будем пренебрегать значением квадрата производной $(y'(x))^2$ по сравнению с единицей.

Функционал потенциальной энергии системы состоит из суммы упругой энергии деформированной балки и потенциальной энергии балки и точечной массы m на ее свободном конце:

$$U[y(x)] = mg\, y(L) + \int_0^L \left(\kappa \, \frac{(y''(x))^2}{2} + \rho g\, y(x) \right) dx.$$

На искомой функции $y(x)$ функционал U принимает экстремальное (минимальное) значение. Уравнение на $y(x)$ и находится из условия равенства нулю вариации δU:

$$\delta U = \kappa y''(L)\delta y'(L) + \left(mg - \kappa y^{(3)}(L) \right) \delta y(L) + \int_0^L \left(\kappa y^{(4)}(x) + \rho g \right) \delta y(x) dx = 0.$$

Здесь мы учли, что $\delta y(0) = 0$ и $\delta y'(0) = 0$ в силу граничных условий (4).

Произвольность и независимость вариаций $\delta y(L)$, $\delta y'(L)$ и $\delta y(x)$ приводит к дифференциальному уравнению четвертого порядка на функцию $y(x)$ с четырьмя граничными условиями:

$$\kappa y^{(4)} + \rho g = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(L) = 0, \quad mg - \kappa y^{(3)}(L) = 0.$$

Решение этой граничной задачи приводит к искомому ответу на форму балки:

$$y(x) = -\frac{\rho g}{\kappa} \, x^2 \left(x^2 - 4xL \left(1 + \frac{m}{M} \right) + 6L^2 \left(1 + 2\, \frac{m}{M} \right) \right),$$

где $M = \rho L$ — масса балки.

$\square$

Задача 8. *Два точечных противоположных по знаку заряда q и $-q$ закреплены на концах непроводящего стержня длины $2l$. Стержень может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину. На оси вращения также находится блок радиуса R, жестко связанный со стрежнем с зарядами. На блок намотана тонкая нерастяжимая невесомая нить, на свободном конце которой висит груз массы m. Груз может опускаться вдоль вертикальной прямой, приводя во вращение блок со стержнем. Ускорение свободного падения g, трением в системе можно пренебречь. Определите установившуюся угловую скорость вращения стержня, предполагая, что скорость движения зарядов в стационарном режиме много меньше скорости света c. При каком соотношении на параметры задачи это будет выполнено?*

Указание. *Мощность электромагнитного излучения зарядов оцените в дипольном приближении.*

Решение. При опускании груза m система зарядов будет раскручиваться и, в силу ускоренного движения зарядов, возникнет электромагнитное излучение. С ростом угловой скорости вращения мощность этого излучения будет также возрастать и в итоге сравняется с мощностью работы силы тяжести. Далее груз m будет опускаться с постоянной скоростью v, а заряды будут равномерно вращаться с угловой скоростью $\omega = v/R$. Уменьшение потенциальной энергии груза в поле тяжести будет равно энергии, уносимой электромагнитными волнами.

Дипольный момент системы зарядов:

$$\vec{D}(t) = q\vec{r}_1 - q\vec{r}_2 = 2ql \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix},$$

где радиус-векторы зарядов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ записаны в полярных координатах, введенных в плоскости вращения стержня с зарядами. Мгновенная мощность дипольного излучения во всех направлениях дается известной формулой (в системе единиц СГСЭ):

$$W = \frac{2}{3c^3}\,|\ddot{\vec{D}}|^2,$$

где c — скорость света, а точки над вектором обозначают вторую производную по времени. Подставляя вектор $\vec{D}(t)$ для нашего случая, получаем, что мощность излучения постоянна по времени при постоянной угловой скорости вращения:

$$W = \frac{8}{3c^3}\,q^2 l^2 \omega^4.$$

Приравнивая мощность излучения W и мощность работы силы тяжести при опускании груза m со скоростью ωR

$$W = mg\omega R,$$

получаем ответ для угловой скорости стационарного режима вращения:

$$\omega = \frac{c}{2l}\sqrt[3]{\frac{3mgRl}{q^2}}.$$

Условие применимости дипольного разложения — медленное по сравнению со скоростью света c движение зарядов в ограниченной области — приводит к такому условию на параметры задачи:

$$\omega l << c \quad \Rightarrow \quad mgR << \frac{q^2}{l},$$

которое с физической точки зрения означает, что электростатическая энергия взаимодействия зарядов $q^2/2l$ значительно больше потери потенциальной энергии груза за один оборот системы $\Delta U = 2\pi mgR$. □