Высшая лига
ОЛИМПИАДА СТУДЕНТОВ И ВЫПУСКНИКОВ

Критерии оценивания заданий заключительного этапа
по направлению «Математика»

Задания по направлению состояли только из инвариантной части. Для того, чтобы претендовать на статусы медалиста, дипломанта I, II, III степени, участникам необходимо набрать наибольшее число баллов за все задания.

Номер задания	Максимальный балл	Учёт в рейтинге по направлению
1	20	✓ В сумме за задания можно получить не более 100 баллов
2	20	
3	20	
4	20	
5	30	
6	30	
7	30	
8	30	

Ниже в документе представлены подробные критерии оценивания каждой из задач.

Критерии оценки задач олимпиады "Высшая лига" по направлению "Математика"

Задача 1

[20 баллов] Верный пример в предположении, что матрица может быть вырожденной.
Если предполагалась невырожденность матрицы A:
[7 баллов] Доказано, что собственные значения являются корнями из 1.
[7 баллов] Доказано, что собственные значения равны 1.
[6 баллов] Доказано, что матрица $(A - E)$ нильпотентна.
[2 балла] Доказано только то, что модуль собственных значений равен 1.
[- 3 балла] Пробелы в доказательстве факт, что все собственные значения – корни из 1.
[- 3 балла] Пробелы в доказательстве факта, что все собственные значения равны 1.

Задача 2

[15 баллов] Верно описан участок интегрирования, интеграл записан с несущественной ошибкой.
[10 баллов] Верно описан участок интегрирования, интеграл записан с существенной ошибкой.
[5 баллов] Верно описан участок интегрирования, интеграл неверный.
[3 балла] Верная идея решения.
[-3 балла] При подсчете матожидания в участке, не учитено, что ее обьем не равен один.
[-1 – -3 балла] Арифметические ошибки.

Задача 3

Пункт а)

[10 баллов] Доказано, что заданное дифференциальное уравнение имеет решение, определённое на всей прямой ($x = 1$).

[5 баллов] В работе посчитан предел $\lim_{x\to 1} f(x)$.

[2 балла] В работе проведён анализ функции $x(t) = e^{\frac{1}{t}} + \frac{1}{t}$, которая по условию является решением дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = f(x)$ (найдена область определения, область значений, промежутки монотонности, асимптоты).

Пункт б)
[10 баллов] Найдены все решения дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = f(x)$, определённые на всевозможных интервалах.
[3 балла] Обосновано утверждение, что если $x(t)$ есть решение дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = f(x)$ на области своего определения, то $x(t + C)$

(где C – произвольная постоянная) также является решением дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = f(x)$ на области своего определения.
[3 балла] В работе доказано, что функция $f(x)$ является непрерывно дифференцируемой при $x \neq 1$.
[2 балла] Обосновано утверждение, что через каждую точку плоскости tOx, координата x которой отлична от 1 проходит график функции $x(t + C) = e^{\frac{1}{t+C}} + \frac{1}{t+C}$ для некоторого C.
[-2 балла] В работе не доказано, что единственным решением, проходящим через точку с координатами $(t, 1)$, является постоянное решение $x = 1$.
[-7 баллов] В работе найдены все решения дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = f(x)$ на всевозможных интервалах, однако отсутствует обоснование, почему других решений нет.
[-1 балл] Вычислительные ошибки.
[-1 балл] Потеряно решение, определённое на всей прямой.
[-1 балл] Ответ задачи записан без указания интервалов, на которых найденные функции являются решением заданного дифференциального уравнения.

Задача 4

[10 баллов] Корректное решение в предположении дифференцируемости f.
[2 балла] Замечено, что $\int\limits_0^2 f(x)P(x)dx$ является целым числом для любого целого многочлена P.
[2 балла] Замечено, что $\int\limits_0^1 f(x)x^k$ убывает с ростом k.
[0 баллов] Вывод решения из свойств делимости значений первообразной функции f в граничных точках без дополнительных обоснований.
[0 баллов] Приведен пример функции для конкретного k.
[0 баллов] Решение строилось на плотности множества $\mathbb{Z}[x]$ в $C[0, 2]$ (это утверждение неверно).

Задача 5

[30 баллов] Верное решение с применением теоремы Арцела-Асколи.
[25 баллов] Верное решение в предположении того, что X — метрическое пространство.
[10 баллов] Верная идея решения.
[2 балла] Верные соображения, использующиеся при решении задачи без продвижений.
[-5 баллов] Используется без доказательства факт, что в выражении $\sup_{f \in K} f(x)$ достигается супермум на некоторой функции.
[0 баллов] Заявлена, но не доказана непрерывность функции g.

[0 баллов] Построен контрпример.
[0 баллов] Использовался неверный критерий компактности в пространстве $C(X)$.

Задача 6

[10 баллов] Верно описаны неприводимые представления S_4.
[-4 балла] Аргументация описания верна, но содержит существенные недочёты.
[10 баллов] Доказано, какие из неприводимых точные.
[-4 балла] Правильное описание точных неприводимых представлений, но существенные недочёты в аргументации.
[2 балла] Верно составлено целочисленное уравнение дающее число неприводимых представлений.
[8 баллов] Верно посчитанно число решений целочисленного уравнения.
[-2 балла] Недочёты в подсчёте числа представлений.

Задача 7

[16 баллов] Найдены 2 недостающих граничных условия для дифференциального уравнения (по 8 баллов за каждое условие).
[6 баллов] Верно найдены значения произвольных коэффициентов общего решения дифференциального уравнения из граничных условий.
[3 балла] Верно выписан функционал энергии системы.
[2 балла] Получено дифференциальное уравнение на функцию $y(x)$.
[3 балла] Написано общее решение дифференциального уравнения.

Задача 8

[15 баллов] Верно найдено выражение для дипольного излучения.
[10 баллов] Получена угловая скорость вращения из закона сохранения полной энергии системы.
[5 баллов] Приведено ограничение на параметры задачи, при котором верно решение в дипольном приближении.