Критерии оценивания заданий заключительного этапа по направлению «Теория игр»

Задания по направлению состояли только из инвариантной части. Для того, чтобы претендовать на статусы медалиста, дипломанта I, II, III степени, участникам необходимо набрать наибольшее число баллов за все задания.

Номер задания	Максимальный балл	Учёт в рейтинге по направлению
1	10	✓
2	20	✓
3	20	✓
4	20	✓
5	15	✓
6	15	✓

Ниже в документе представлены условия, решения и критерии оценивания каждой из задач.

Профиль: «Теория игр» **КОД - 280**

Памяти Андрея Бремзена

Время выполнения задания – 180 мин., язык – русский или английский.

Решите все задачи. Веса задач, в том числе каждого подвопроса, приведены в скобках.

Инструкции.

- Решение может быть представлено как на русском, так и на английском языке. Никаких дополнительных баллов, впрочем, как и штрафов, за решение на английском языке не предусмотрено.
- Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк – распознаваемым. Ответы на качественные вопросы должны быть убедительно аргументированы, но длинные рассуждения, не относящиеся к сути дела, могут негативно повлиять на оценку.
- Все шаги в решении должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе. Калькуляторами пользоваться запрещено.
- Черновики не предусмотрены, решение сразу оформляется на чистовик.
- Если приведенное решение является неверным, перечеркните его (перечеркнутое решение не проверяется) и приведите корректную версию.
- При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, а апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.

Удачи!

Задача 1. Секрет четности. (10 баллов)

Теория игр содержит в себе много красивых и неочевидных фактов. Одно доказательство существования равновесия Нэша чего стоит! Есть и другие примеры неочевидных теорем. Роберт Уилсон доказал в 1971 году, что почти все конечные игры имеют нечетное число равновесий Нэша. Про эту теорему, смысл словосочетания почти все и интуитивную интерпретацию доказательства мы расскажем в файле с решениями задач олимпиады. К счастью, от участников олимпиады не требуется доказать эту сложную теорему. В рамках этой задачи мы лишь покажем, что в формулировке теоремы нельзя заменить почти все на все.

Приведите пример игры на двух игроков с конечным числом чистых стратегий, которая имеет:

1. бесконечное число равновесий Нэша;
2. конечное четное число равновесий Нэша.

Не забудьте показать, что ваш пример подходит под условие!

Примечание: Равновесием Нэша мы считаем как равновесие в чистых стратегиях, так и равновесие в смешанных стратегиях.

The Secret of Evenness. (10 points)

Game theory contains many beautiful and non-obvious facts, i.e. the proof of the existence of the Nash equilibrium. There are other examples of non-obvious theorems. In 1971, Robert Wilson proved that almost all finite games have an odd number of Nash equilibria. We will tell the meaning of the phrase almost everything and the intuitive interpretation of the proof in the file with solutions to the problems of the Olympiad. Fortunately, the participants of the Olympiad are not required to prove this complex theorem. We ask you only to show that in the formulation of the theorem it is impossible to replace almost everything with everything.

Give an example of a two-player game with a finite number of pure strategies that has:

1. an infinite number of Nash equilibria;
2. a finite even number of Nash equilibria.

Don't forget to show that your example fits the condition!

Note: Nash equilibrium can be both in pure strategies and in mixed strategies.

Решение.

1. Пример на бесконечное число равновесий Нэша.

	t_1	t_2
s_1	$0;0$	$0;0$
s_2	$0;0$	$0;0$

Легко видеть, что результат игры не зависит от выбора стратегий, поэтому игроки могут играть любую смесь стратегий и это будет равновесием Нэша.

2. Пример на четное число равновесий Нэша

	t_1	t_2
s_1	$0;0$	$0;0$
s_2	$0;0$	$1;1$

Это симметричная игра. Если оппонент играет первую стратегию, то игрок в любом случае получит 0, а значит может играть любую стратегию. Если оппонент с ненулевой вероятностью использует вторую стратегию, то оптимальным ответом для игрока будет использование второй стратегии. Отсюда несложно заключить, что есть ровно два набора стратегий, при которых ни один из игроков не отклонится: (s_1, t_1) и (s_2, t_2). Пример на два равновесия Нэша построен.

Дополнительно прилагаем:

Доказательство Теоремы о Нечетности

Интуитивное объяснение

Критерии.

1.1. Правильный пример без доказательства - 2 балла, правильный пример с доказательством - 5 баллов.

1.2. Правильный пример без доказательства - 2 балла, правильный пример с доказательством - 5 баллов.

Задача 2. Города. (20 баллов) Города — игра, в которой игроки по очереди называют город, название которого начинается на ту букву, которой оканчивается название предыдущего города. Первый игрок в свой первый ход может назвать любой город. Нельзя называть города, которые были названы ранее любым из игроков. Проигрывает игрок, который не может сделать ход.

Друзья А и Б живут в стране Абабба. Они решили сыграть в города, причем они договорились использовать в игре только города своей страны. Сказочная страна Абабба примечательна тем, что в ее алфавите есть только две буквы: А и Б. Друзья отлично знают географию своей страны:

- есть a городов, которые начинаются на А и заканчиваются на А
- есть b городов, которые начинаются на А и заканчиваются на Б
- есть c городов, которые начинаются на Б и заканчиваются на А
- есть d городов, которые начинаются на Б и заканчиваются на Б

a, b, c, d - целые неотрицательные числа. Первый ход делает игрок А. Опишите множество всех (a, b, c, d), при которых у игрока Б есть выигрышная стратегия.

Shiritori. (20 points) Cities (shiritory, jielong) is a game in which players announce a city whose name begins with the letter that ends with the previous city's name in turn. The first player may name any city on her first turn. You cannot name cities that were previously named by any of the players. The player who cannot make a move loses.

Friends A and B live in country Ababba. They decide to play cities, and they agree to use only the cities of their country in the game. The fabulous country of Ababba is notable for the fact that there are only two letters in its alphabet: A and B. Friends know the geography of their country very well:

- there are a cities that start with A and end with A
- there are b cities that start with A and end with B
- there are c cities that start with B and end with A
- there are d cities that start with B and end with B

a, b, c, d are non-negative integers. Player A makes the first move. Describe the set of all (a, b, c, d) for which player B has a winning strategy.

Решение.

Прежде всего заметим, что для игры достаточно знать первую и последнюю буквы всех городов. Поэтому информация о количестве городов с первой буквой x и последней буквой y для всех x, y из алфавита позволяет однозначно определить, у кого из игроков есть выигрышная стратегия.

Вспомогательное утверждение

Пусть у i-го игрока есть выигрышная стратегия в игре с параметрами (a,b,c,d). Тогда у i-го игрока есть выигрышная стратегия в играх с параметрами $(a+2,b,c,d)$ и $(a,b,c,d+2)$.

Доказательство

Пусть у i-го игрока есть выигрышная стратегия s в игре с параметрами (a,b,c,d). Пусть добавляется два новых города, которые начинаются и заканчиваются на одну и ту же букву (пусть для определенности на букву А, для буквы Б аналогично). Построим стратегию $\hat{s}$, которая приведет i-го игрока к победе в новой игре с параметрами $(a+2,b,c,d)$.

Назовем *старыми* города, которые были в игре (a,b,c,d) и *новыми* два добавленных города. Выигрышная стратегия $\hat{s}$ для i-го игрока в игре $(a+2,b,c,d)$: если оппонент называет *старый* город либо $i = 1$ и мы делаем первый ход в игре, то называем город согласно стратегии s; если оппонент называет *новый* город, то также называем *новый* город. Объясним, почему $\hat{s}$ обеспечивает победу i-му игроку. Если оппонент за всю игру не назвал ни одного *нового* города, то игра свелась к игре (a,b,c,d), где i-ый игрок всегда следовал стратегии s, которая является выигрышной. Отсюда следует, что i-ый игрок побеждает. Если в какой-то момент игры оппонент назвал *новый* город, то i-ый игрок тоже называет *новый* город (после чего доступные *новые* города заканчиваются). Заметим, что оба *новых* города начинаются и заканчиваются на одну и ту же букву. Это значит, что на следующий ход после использования *нового* города оппонент оказался в проигрышной для себя подыгре *старой* игры, т.к. i-ый игрок использовал выигрышную в *старой* игре стратегию s, а использование *новых* городов ранее не повлекло за собой смену буквы, на которую оппонент должен начинать город. Отсюда следует, что i-ый игрок побеждает.

Выигрышная стратегия построена, значит у i-го игрока есть выигрышная стратегия в играх с параметрами $(a+2,b,c,d)$.

Следствие

Для определения победителя игры достаточно знать значения b, c и четность a, d.

Воспользуемся этим и разберем четыре случая, когда a, d равны 0 или 1.

Случай 1. $(0, b, c, 0)$

Игра в этом случае похожа на пинг-понг: один игроков всегда вынужден называть города А...б, а другой города Б...а. Выиграет тот, у кого в запасе больше городов. Первый игрок своим первым ходом может выбрать, хочет он называть города А...б или Б...а.

Если $b > c$, то первый игрок называет город вида А...б и выигрывает.

Если $b < c$, то первый игрок называет город вида Б...а и выигрывает.

И лишь в случае $b = c$ первый игрок проиграет независимо от того, какой город он назовет. Это значит, что в игре (0,b,b,0) у второго игрока есть выигрышная стратегия.

Случай 2. $(1, b, c, 0)$

Если $b > c$, то первый игрок выигрывает, используя тактику пинг-понг из предыдущего случая: всегда называет города А...б, вынуждая второго игрока отвечать Б...а. В этой ситуации у второго игрока раньше заканчиваются города типа Б...а и он проигрывает.

Если $b \leq c$, то первый игрок первым ходом называет А...а, после чего игра вновь сводится к пинг-понгу, где второй игрок вынужден играть городами А...б и проиграть, т.к. по предположению $b \leq c$.

Случай 3. $(0, b, c, 1)$

Аналогично случаю 2, у первого игрока есть выигрышная стратегия при любых b, c.

Случай 4. $(1, b, c, 1)$

Если $b \leq c$, то первый игрок первым ходом называет А...а, после чего использует тактику пинг-понга, отвечая на города А...б городами Б...а. Второй игрок вынужден играть городами А...б и проиграть, т.к. по предположению $b \leq c$.

Если $b > c$, то первый игрок первым ходом называет Б...б, после чего использует тактику пинг-понга, отвечая на города Б...а городами А...б. Второй игрок вынужден играть городами Б...а и проиграть, т.к. по предположению $b > c$.

Вывод

У второго игрока есть выигрышная стратегия лишь в случае 1 при $b = c$. С помощью следствия из вспомогательного утверждения мы заключаем, что у второго игрока есть выигрыш тогда и только тогда, когда $b = c$ и a, d являются четными.

Ответ: $(2m, k, k, 2n)$, где m, n, k - целые неотрицательные числа.

Критерии.

- Правильный ответ и корректное и полное решение – 20 баллов,
- Доказана четность a и d, есть условие $b = c$, но потребовано от b дополнительное условие четности – 10 баллов,
- Доказана достаточность $(2n, k, k, 2m)$, при k,m,$n \in \mathbf{Z}$, но не доказана необходимость – 10 баллов,
- Доказана четность a и d, но нет условия $b = c$ (кроме совсем простого случая, когда $b = c = 0$ – тогда 0 баллов), – 5 баллов,
- Рассмотрены только очень частные случаи, например, только случай только случай $(0, 0, 1, 1)$ и $(1, 0, 1, 0)$ – 0 баллов,
- Есть правильный ответ, но нет корректного решения – 0 баллов,
- Ответ значительно отличается от правильного или решение содержит существенные ошибки – 0 баллов,

- Если ответ правильный, но обоснование неполное (например, после рассмотрения некоторых случаев написано, что доказательство, очевидно, строится по аналогии, при этом как именно оно строится не понятно), то снимается до 10 баллов.

Задача 3. Медвежий рынок. (20 баллов) Есть N медведей и K<N ульев, каждый медведь n имеет какой-то вес $w_n > 0$, и каждый улей содержит какую-то массу $m_k > 0$ мёда. Каждый медведь выбирает один из ульев, и после этого мёд каждого улья делится между выбравшими его медведями пропорционально их весу. Всегда ли в этой игре существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях? (То есть, такое разбиение медведей по ульям, что никто не хочет в одностороннем порядке поменять свой улей на другой.) Докажите или приведите контрпример.

Bear market. (20 points) There are N bears and k<N hives, each bear n has some weight $w_n > 0$, and each hive contains some mass $m_k > 0$ of honey. Each bear chooses one of the hives, and after that the honey from each hive is divided among the bears that chose it in proportion to their weights. Does this game always have a Nash equilibrium in pure strategies? (That is such a division of bears into hives that no one wants to unilaterally change their hive for another.) Prove this or give a counterexample.

Решение.

Доказательство устроено по индукции.

База индукции. Рассмотрим произвольную проблему (I,S,m,W) со всего 1 медведем, $I = \{i_1\}$. Эта проблема имеет равновесие Нэша μ, в котором медведь i_1 занимает наиболее предпочтительный (большой) улей s и получает весь мед из него $m_{is}(\mu) = m_s$.

Шаг индукции. Пусть любая проблема размера $|I| \leq n-1$ (число медведей) имеет равновесие Нэша. Теперь докажем это для проблемы размера $|I| = n$.

Рассмотрим произвольную проблему (I,S,m,W) с $|I| = n$ и ее подпроблему $(I \setminus \{i_n\},S,m,W)$, полученную удалением медведя с наименьшим весом i_n. Согласно предположению шага индукции, существует такое распределение медведей μ, которое является равновесием Нэша для подпроблемы. Покажем теперь, что добавление i_n к подпроблеме не нарушит стабильности μ.

Смэтчим медведя i_n с таким ульем s, который обеспечит ему наибольшее количество меда при условии, что другие медведи распределены согласно μ: для любого другого улья $s' \neq s$ мы должны иметь

$$m_s \frac{w_n}{\sum_{i\in\mu(s)} w_i + w_n} \geq m_{s'} \frac{w_n}{\sum_{i\in\mu(s')} w_i + w_n}. \tag{1}$$

После того как мы распределили медведя i_n в улей s, “статус” во всех других ульях не изменился, так что не существует медведя $j \notin \mu(s)$, который захотел бы отклониться в какой-то улей $s' \in S$, поскольку в противном случае он хотел бы отклониться от μ также и в подпроблеме.

Покажем теперь, что для медведя $j \in \mu(s)$ также не существует нового привлекательного улья $s' \in S$. Предположим противное, пусть (j,s') является такой “блокирующей” парой, что значит

$$m_{s'} \frac{w_j}{\sum_{i\in\mu(s')} w_i + w_j} > m_s \frac{w_j}{\sum_{i\in\mu(s)} w_i + w_n}. \tag{2}$$

Но в этом случае i_n должен был бы быть смэтчен с ульем s', а не с s. Действительно, поскольку $w_n \leq w_j$

$$m_{s'} \frac{w_n}{\sum_{i\in\mu(s')} w_i + w_n} \geq m_{s'} \frac{w_n}{\sum_{i\in\mu(s')} w_i + w_j} = \frac{w_n}{w_j} \cdot m_{s'} \frac{w_j}{\sum_{i\in\mu(s')} w_i + w_j}.$$

И тогда из неравенства 2 мы далее получаем

$$\frac{w_n}{w_j} \cdot m_{s'} \frac{w_j}{\sum_{i\in\mu(s')} w_i + w_j} > \frac{w_n}{w_j} \cdot m_s \frac{w_j}{\sum_{i\in\mu(s)} w_i + w_n} = m_s \frac{w_n}{\sum_{i\in\mu(s)} w_i + w_n}. \tag{3}$$

Объединяя эти два неравенства, получаем

$$m_{s'}\frac{w_n}{\sum_{i\in\mu(s')} w_i + w_n} > m_s\frac{w_n}{\sum_{i\in\mu(s)} w_i + w_n},$$

что противоречит неравенству 1.

Таким образом, после того, как медведь i_n выбрал улей s, не нашлось блокирующих пар "медведь-улей", т.е. получено снова равновесие.

Алгоритмическая версия происходящего – при должном объяснении могла быть засчитана как решение. Рассмотрим конкретную проблему распределения. Будем последовательно мэтчить медведей в соответствии с их весами начиная с самого тяжелого: каждый медведь выбирает наиболее предпочтительный улей с учетом выбора предыдущих медведей в алгоритме. Так же, как и выше, можно показать, что никто из медведей не захочет отклониться.

Критерии.

- Доказательство существования равновесия Нэша в чистых стратегиях можно было провести по индукции или конструктивно (алгоритмически). Оба варианта доказательства при должных пояснениях засчитывались одинаково
- 20 баллов ставились за полное и подробное доказательство существования равновесия в чистых стратегиях.
- 5 баллов ставились за правильное рассмотрение частного примера.
- Частичные баллы ставились за попытки доказательства, если они содержали верные утверждения, котрые могли бы привести к корректному доказательству при должном обосновании.

Задача 4. Долгий бал(л). (20 баллов)

В уездном городе NN на балу встречаются N кавалеров и N дам. У всех кавалеров и дам строгие предпочтения относительно партнеров. Для всех кавалеров и дам танцевать хотя бы с кем-то лучше, чем стоять в одиночестве. Во время танца определение пар происходит следующим образом. На первом круге приглашений каждый кавалер приглашает свою "первую" даму (ту, которая нравится ему больше всего). Дама выбирает из всех приглашений лучшее и отказывает остальным. Однако она не спешит с ответом лучшему из пригласивших, ожидая, что в будущем она может получить приглашение от более желанного кавалера. На втором круге каждый кавалер, получивший отказ идёт к своей "второй" даме (лучшей, которая ещё не отказала), и снова каждая дама выбирает из всех приглашений лучшее и отказывает остальным, И так далее пока все не разобьются на пары.

Так начиналась задача 4 финального этапа Открытой Олимпиады ВШЭ по теории игр 2017. Нужно было сравнить два способа формирования пар. В нашем ремейке описан один из способов.

Этот способ формирования пар эффективный, но насколько он быстрый? Ведь пока кавалеры ходят от одной даме к другой, может закончиться музыка!

Пусть N=3.

1. Докажите, что пяти кругов достаточно, чтобы сформировать все три пары.

2. Приведите пример предпочтений, при которых все пары будут сформированы только на пятый круг.

Пусть N теперь произвольное.

3. Обозначим через T(N) максимальное число шагов, которое может потребоваться на то, чтобы N кавалеров и N дам разбились на пары. Оцените T(N) сверху, чем точнее тем лучше.

4. Тот же вопрос про оценку снизу.

Long dance. (20 points)

In the county town NN, N gentlemen and N ladies meet at a ball. All gentlemen and ladies have strict preferences regarding partners. For all gentlemen and ladies, dancing with at least someone is better than standing alone. During the dance, forming pairs occurs as follows. On the first round of invitations, each gentleman invites his “first” lady (the one that he likes the most). The lady chooses the best of all the invitations and refuses the rest. However, she is in no hurry to accept the best of the invitees, expecting that in In the future, she may receive an invitation from a more prefferable gentleman. On the second round, each cavalier who has received a refusal goes to his “second” lady (the best one who has not yet refused), and again each lady chooses the best from all the invitations and refuses the rest, and so on until everyone is divided into pairs.

This is how the task of the 4th final stage of the HSE Open Olympiad in Game Theory 2017 began. It was necessary to compare two methods of forming pairs. Our remake describes one of the ways.

This method is efficient, but how fast is it? After all, while gentlemen go from one lady to another, the music may end!

Let N=3.

1. Prove that five rounds are enough to form all three pairs.
2. Give an example of preferences under which all pairs will be formed exactly on the fifth round.

Let N now be arbitrary.

3. Denote by T(N) the maximum number of rounds that may be required for N gentlemen and N ladies to pair up. Estimate T(N) from above, the more accurate the better.
4. The same question about the estimate from below.

Решение.

Докажем утверждение, которое решает все четыре пункта:

$$T(N) = N^2 - 2N + 2$$

<u>Оценка сверху</u>

Заметим, что в каждом из кругов хотя бы один кавалер должен приглашать даму, причем ту, которую не приглашал ранее. Так как всего есть N^2 пар кавалер-дама и на каждом из кругов хотя бы один кавалер подходит к даме, к которой еще не подходил, то кругов не может быть больше N^2. $T(N) \leq N^2$.

Также легко заметить, что в первый круг каждый из N кавалеров подходит к своей первой даме. Итак, в первый круг пробуется N сочетаний кавалер-дама, в каждый из последующих кругов пробуется как минимум одно новое сочетание, а всего сочетаний N^2. Значит $T(N) \leq N^2 - N + 1$.

Точную оценку нам позволяет получить еще одно тонкое наблюдение. Заметим, что к дама, к которой кавалер подходит на последнем круге, не могла ранее получить предложение от других кавалеров. Действительно, ведь в противном случае этой даме пришлось бы отказывать или подошедшему к ней кавалеру, или кавалеру, который подходил к ней ранее. А в этом случае круг не может быть последним, т.к. остается кавалер без пары! Итак, на последнем круге хотя бы один кавалер подходит к даме, и эта дама не могла ранее получать предложение от других кавалеров. Получается, что всего в процессе алгоритма может быть не более N^2-N+1 сочетаний "кавалер + дама, к который подошел кавалер". Как мы отмечали, в первый круг пробуется N сочетаний "кавалер + дама, к который подошел кавалер"и в каждый из последующих кругов пробуется как минимум одно новое сочетание, а всего допустимых сочетаний $N^2 - N + 1$. Отсюда $T(N) \leq (N^2 - N + 1) - N + 1 = N^2 - 2N + 2$

<u>Пример на $N^2 - 2N + 2$ кругов</u>

Ранее мы показали, что $T(N) \leq N^2 - 2N + 2$. Чтобы доказать, что $T(N) = N^2 - 2N + 2$, достаточно привести пример предпочтений дам и кавалеров, при которых число кругов равно

N^2-2N+2.

Для каждого игрока будем выписывать предпочтения от наиболее предпочтительного партера к наименее. Например, запись $m_1 : w_1w_2w_3$ значит, что первому кавалеру больше всех нравится первая дама, затем вторая, затем третья.

$$\begin{array}{rcccccc}
m_1: & w_1 & w_2 & \dots & w_{N-2} & w_{N-1} & w_N \\
m_2: & w_2 & w_3 & \dots & w_{N-1} & w_1 & w_N \\
m_3: & w_3 & w_4 & \dots & w_1 & w_2 & w_N \\
\dots & \dots & & & & & \\
m_{N-1}: & w_{N-1} & w_1 & \dots & w_{N-3} & w_{N-2} & w_N \\
m_N: & w_{N-1} & w_1 & \dots & w_{N-3} & w_{N-2} & w_N
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc}
w_1: & m_2 & m_3 & \dots & m_{N-1} & m_N & m_1 \\
w_2: & m_3 & m_4 & \dots & m_N & m_1 & m_2 \\
\dots & \dots & & & & & \\
w_{N-2}: & m_{N-1} & m_N & \dots & m_{N-4} & m_{N-3} & m_{N-2} \\
w_{N-1}: & m_1 & m_2 & \dots & m_{N-3} & m_{N-2} & m_{N-1} \\
w_N: & m_1 & m_2 & \dots & m_{N-3} & m_{N-2} & m_{N-1}
\end{array}$$

Нетрудно проверить, что на первом этапе i-ый кавалер подойдет к i-ой даме, кроме N-го кавалера, который подойдет к даме $N-1$. Эта дама его отвергнет, и дальше будет процесс похожий на змейку: одного кавалера отвергают, он подходит к следующей по своим предпочтениям даме, она в свою очередь отвергает кавалера, который был с ней до этого. Каждый кавалер подойдет к каждой даме, кроме w_n, к ней подойдет лишь один кавалер на последнем шаге. Итак, в процессе алгоритма пробуется N^2-N+1 пар, причем в первый круг будет попробовано N пар, а в остальные ровно одна новая. Итого кругов $(N^2-N+1)-N+1=N^2-2N+2$.

Пример построен, а значит утверждение доказано.

Ответ: $T(N)=N^2-2N+2$.

Для более наглядной демонстрации построенного примера ниже подробно разбираем решение пункта 2 ($N=3$).

$$\begin{array}{rccc}
m_1: & w_1 & w_2 & w_3 \\
m_2: & w_2 & w_1 & w_3 \\
m_3: & w_2 & w_1 & w_3
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}
w_1: & m_2 & m_3 & m_1 \\
w_2: & m_1 & m_2 & m_3 \\
w_3: & m_1 & m_2 & m_3
\end{array}$$

Круг 1

m_1 приглашает w_1, m_2 приглашает w_2, m_3 приглашает w_2. Вторая дама отказывает третьему кавалеру.

Круг 2

Пары на данный момент: m_1+w_1, m_2+w_2. m_3 получил отказ от w_2, поэтому приглашает следующую по своим предпочтениям w_1. Для первой дамы третий кавалер лучше первого, поэтому она отказывает первому.

Круг 3

Пары на данный момент: m_3+w_1, m_2+w_2. m_1 получил отказ от w_1, поэтому приглашает следующую по своим предпочтениям w_2. Для второй дамы первый кавалер лучше второго, поэтому она отказывает второму.

Круг 4

Пары на данный момент: $m_3 + w_1, m_1 + w_2$. m_2 получил отказ от w_2, поэтому приглашает следующую по своим предпочтениям w_1. Для первой дамы второй кавалер лучше третьего, поэтому она отказывает третьему.

Круг 5

Пары на данный момент: $m_2 + w_1, m_1 + w_2$. m_3 получил отказ от w_1 и ранее от w_2, поэтому вынужденно идет к w_3. Теперь все пары сформированы: $m_2 + w_1, m_1 + w_2, m_3 + w_3$. Выполнение алгоритма завершено.

Критерии.

Задача 4.1.

- Все верно - 5 баллов,
- Решение не полное, рассмотрены не все ситуации распределения на первом круге (или не вся структура отказов) - 3 балла,
- Решение не полное. Однако в ходе решения есть верные утверждения - 1 балл.

Задача 4.2.

- Правильный пример с доказательством - 5 баллов,
- Правильный пример без доказательства - 3 балла.

Задачи 4.3 и 4.4.

- Все верно - 10 баллов,
- Решение верное только для одной оценки (сверху или снизу), однако для второй - оценка другая - 8 баллов,
- Решение не верное, однако в ходе решения есть верные утверждения. В частности, пояснение про N(N-1) - 3 балла,
- В качестве решения предложена грубая оценка для крайнего случай (например $N = 1$ или N^2) - 2 балла.

Задача 5. Лучше быть здоровым и умным. (15 баллов)

Роберт Ауман (Игрок 1), Ариэль Рубинштейн (игрок 2) и Роджер Майерсон (игрок 3) рациональны в вопросах здравоохранения. Как только на рынок выпускается новая экспериментальная вакцина от ковида, каждый из них должен решить, достаточно ли она безопасна для того, чтобы привиться. Проблема в том, что имеющейся у каждого информации недостаточно для того, чтобы быть уверенным наверняка. Изначально известно, что возможны два состояния мира: $w = S$ (то есть прививка безопасна) и $w = D$ (то есть прививка может иметь отложенные побочные эффекты). При этом априорная вероятность того, что $w = S$, равна $p \geq \frac{1}{2}$. В добавок, каждый игрок $i = 1{,}2{,}3$ обладает частной информацией $m_i \in \{S{,}D\}$, почерпнутой от тайных уникальных экспертов из интернета, которая верна с вероятностью $q > p$. То есть если прививка действительно безопасна, то $m_i = S$ с вероятностью q и $m_i = D$ с вероятностью $1 - q$. Более того, при заданном w случайные величины сигналов статистически независимы.

1. Пусть игроки принимают решения, привиться или нет, в такой очередности: Сначала Ауман выбирает $a_1 \in \{\text{прививаться}, \text{не прививаться}\}$, потом Рубинштейн выбирает a_2, потом Майерсон выбирает a_3, и причем каждый сразу пишет пост о своем решении в соцсети, который читают все другие перед собственным решением. Каждый игрок хочет одного: не ошибиться и

сделать прививку, если она безопасна, но не делать, если опасна, - в таком случае он получает выигрыш, равный 1 (и выигрыш, равный 0 в противоположном случае). Найдите, как выбор Рубинштейна будет зависеть от m_2 и a_1.

2. Найдите, как выбор Майерсона будет зависеть от a_1,a_2 и m_3.

3. Пусть имеются N топовых мировых специалистов по теории игр, все они знакомы и дружат в социальной сети. При каких условиях на сигналы происходит *информационный каскад*: если $m_1 = S$, то в равновесии $a_1 = a_2 = \ldots = a_N =$прививаться?

It's better to be healthy and smart. (15 points)

Robert Aumann (Player 1), Ariel Rubinstein (Player 2), and Roger Myerson (Player 3) are rational about healthcare. As soon as a new experimental covid vaccine is released to the market, each of them has to decide if it is safe enough to participate in vaccination. The problem is that the information available to everyone is not enough to be sure in its safety. Initially, it is known that two states of the world are possible: $w = S$ (that is, the vaccine is safe) and $w = D$ (that is, the vaccine can have delayed side effects). A prior probability that $w = S$ is equal to $p \geq \frac{1}{2}$. In addition, each player $i = 1{,}2{,}3$ obtains a private signal $m_i \in \{S{,}D\}$, coming from a secret expert from the Internet, which is correct with probability $q > p$. This means that if the vaccine is really safe, then $m_i = S$ with probability q and $m_i = D$ with probability $1 - q$. Moreover, for a given w, the random variables of the signals are statistically independent.

1. Let the players decide whether to vaccinate or not, in this order: first, Auman chooses $a_1 \in \{vaccinate, not\}$, after that Rubinstein chooses a_2, after that Myerson chooses a_3, and each player immediately writes a post about his decision in the social network, which is read by all the others before their decisions. Each player wants not to make a mistake and to vaccinates if it is safe, but not to do it if it is dangerous, in this case he gets a payoff equal to 1 (and a payoff equal to 0 otherwise). Find how Rubinstein's choice depends on m_2 and a_1.

2. Find how Myerson's choice will depend on a_1,a_2 and m_3.

3. Let there be N of the world's top game theorists, they all know each other and are friends on a social network. Under which condition on signals an *information cascade* occurs: if $m_1 = S$, then in equilibrium $a_1 = a_2 = \ldots = a_N =$vaccinate?

Решение.

Для удобства переобозначим множество действий: пусть стратегия вакцинироваться называется S (по аналогии с соответствующим сигналом о безопасности вакцины), а стратегия не вакцинироваться называется D (по аналогии с сигналом D).

Найдем сначала равновесное действие Аумана, в зависимости от его сигнала m_1. Мы имеем

$$P(w = D|m_1 = D) = \frac{(1-p)q}{(1-p)q + p(1-q)}.$$

Эта величина превышает $\frac{1}{2}$, так как, по условию задачи, $q > p$. Также

$$P(w = D|m_1 = S) = \frac{(1-p)(1-q)}{pq + (1-p)(1-q)} < \frac{1}{2},$$

ибо $p \geq \frac{1}{2}$ и $q > \frac{1}{2}$. Следовательно, $a_1^* = m_1$, то есть Ауман всегда поступит в соответствии со своим частным сигналом.

Теперь рассмотрим оптимальное действие Рубинштейна, в зависимости от действия Аумана $a_1 = m_1$ и его сигнала m_2. Мы имеем

$$P(w = D|m_1 = D{,}m_2 = D) = \frac{(1-p)q^2}{(1-p)q^2 + p(1-q)^2}.$$

Эта величина превышает $\frac{1}{2}$, так как $\frac{q}{1-q} > \frac{p}{1-p} \geq \sqrt{\frac{p}{1-p}}$. Также верно, что

$$P(w = D|DS) = P(w = D|SD) = \frac{(1-p)q(1-q)}{(1-p)q(1-q) + pq(1-q)} < \frac{1}{2}$$

и

$$P(w = D|SS) = \frac{(1-p)(1-q)^2}{pq^2 + (1-p)(1-q)^2} < \frac{1}{2},$$

так как $p \geq \frac{1}{2}$ и $q > \frac{1}{2}$. Следовательно, $a_2^* = D$ если $a_1 = m_2 = D$ и $a_2^* = S$ в любом другом случае.

Наконец, найдем действие Майерсона в зависимости от его частной информации и действий двух первых игроков. В равновесии возможно только $(a_1,a_2) = (S,S)$, $(a_1,a_2) = (D,S)$ либо $(a_1,a_2) = (D,D)$.

Если Ауман вакцинируется, то действие Рубинштейна не даст Майерсону никакой новой информации — поскольку Рубинштейн (вне зависимости от его частной информации) также вакцинируется. Однако это означает, что и Майерсон выберет $a_3 = S$ если $a_1 = S$, вне зависимости от m_3. Действительно,

$$P(w = D|SSD) = \frac{(1-p)q(1-q)}{(1-p)q(1-q) + pq(1-q)} < \frac{1}{2}$$

и

$$P(w = D|SSS) = \frac{(1-p)(1-q)^2}{pq^2 + (1-p)(1-q)^2} < \frac{1}{2}.$$

Если $(a_1,a_2) = (D,D)$, то выбор Майерсона также не будет зависеть от m_3, так как

$$P(w = D|DDD) = \frac{(1-p)q^3}{(1-p)q^3 + p(1-q)^3} > \frac{1}{2}$$

и

$$P(w = D|DDR) = \frac{(1-p)q^2(1-q)}{(1-p)q^2(1-q) + pq(1-q)^2} = \frac{(1-p)q}{(1-p)q + p(1-q)} > \frac{1}{2}.$$

Наконец, если $(a_1,a_2) = (D,S)$, то

$$P(w = D|DSS) = \frac{(1-p)q(1-q)^2}{(1-p)q(1-q)^2 + pq^2(1-q)} < \frac{1}{2}$$

и

$$P(w = D|DSD) = \frac{(1-p)q^2(1-q)}{(1-p)q^2(1-q) + pq(1-q)^2} > \frac{1}{2}.$$

Получается, что для Майерсона выбор определяется его собственным сигналом только в том случае, когда $(a_1,a_2) = (D,S)$; в противном случае, Майерсон игнорирует m_3, выбирая $a_3 = a_1$.

Можно показать, что при произвольном числе игроков равновесная последовательность действий $(a_1,a_2,\ldots,a_N)$ будет зависеть от сигналов $(m_1,m_2,\ldots,m_N)$ следующим образом:

1. Если $m_1 = S$, то $a_i = S$ для всех $i = a,\ldots,N$
2. Пусть $s_1 = D$ и $1 < h \leq N$ таково, что для всех $i \leq h$, $m_i \neq m_{i-1}$. Тогда $a_h = m_h$.
3. Пусть $s_1 = D$ и $1 < h \leq N$ таково, что для всех $i \leq h$, $m_i \neq m_{i-1}$, и $m_{i+1} = m_i$. Тогда $a_j = m_h$ для всех $j \geq h$.

Получается, что почти всегда у нас наступает *информационный каскад*: стоит только двум игроки подряд получить одинаковые сигналы относительно состояния мира, то все остальные игроки начинают копировать их поведение, игнорируя собственную частную информацию.

Критерии.

- Каждый пункт весит по 5 баллов.
- Во всех пунктах: 1-2 балла ставились за правильный ответ без обоснования, либо с неправильным словесным обоснованием без подсчета условных (апостериорных) вероятностей.
- В пунктах 1 и 2: 1-2 балла снимались при наличии вычислительных ошибок, либо при нечетком различении наблюдаемой чужой стратегии и чужого сигнала (ненаблюдаемого), также снимались за лишнюю комбинацию у Майерсона (увидеть действия Аумана вакцинировался и Рубинштейна не вакцинировался невозможно).
- В пункте 3: за первый случай можно было получить максимум 3 балла, в зависимости от полноты объяснения.

Задача 6. Неправильный мёд (15 баллов)

Винни-Пух, Пятачок и ослик Иа-Иа сидят в домике Винни в изоляции от Ковида, щелкают орешки (у каждого их по мешку), и звонят в фирму по доставке еды. Им говорят, что (в обмен на предлагаемый друзьями в виде оплаты надувной шарик) курьер может им доставить что-то одно из списка: или кочан Капусты, или корзинку Брюквы, или баночку Меда. Предпочтения друзей таковы: Винни ценит Мед $=10$ орешков $>$ Брюквы $=5$ орешков $>$ Капусты $=0$ орешков, Пятачок ценит Брюкву $>$ Капусты $>$ Меда $=0$ орешков, Иа-Иа ценит Капусту $>$ Меда $>$ Брюквы $=0$ орешков, и каждый понимает предпочтения свои и друзей.

Они собираются голосовать – что из трех альтернатив заказать – по правилу относительного большинства: победит альтернатива, набравшая больше голосов, и назвать можно только одну, а при равенстве голосов бросается жребий с равными вероятностями. Винни говорит, что раз домик его, и шарик его, то у него должно быть хотя бы полтора голоса, а у них по одному, и друзья согласны. Иа-Иа говорит, что раз он старший, то он назовет свой выбор первым, Пятачок после него, а потом назовет младший – Винни, и друзья согласились. Тут Винни подумал и объявил, что вместо голосования он (раз уж последний) подбросит кубик с тремя сторонами - равновероятно на Брюкву, Капусту, Мед.

1. Рационально ли Винни-Пух поступил - отказался от выбора последним - и почему?

2. По сравнению с этим его случайным выбором, сколько бы Винни-Пух отдал ведущему орешков за присуждение ему, Винни, права первым назвать выбор?

Wrong honey. (15 points)

Winnie the Pooh, Piglet and Eeyore are sitting in Winnie's house in isolation from Covid, cracking nuts (each has a bag of them), and calling a food delivery company. They are told that (in exchange for a balloon offered by friends as payment) the courier can deliver one of the items from the list: either a head of Cabbage, or a basket of Rutabaga, or a jar of Honey. Friends' preferences are: Winnie values Honey $=10$ nuts $>$ Rutabaga $=5$ nuts $>$ Cabbage $=0$ nuts, Piglet values Rutabaga $>$ Cabbage $>$ Honey $=0$ nuts, Eeyore values Cabbage $>$ Honey $>$ Rutabaga $=0$ nuts, and everyone understands everyone preferences.

They are going to vote which of the three alternatives to order according to the rule of relative majority: the alternative with the most votes will win, and one can vote only for the unique alternative, and if the votes are equally distributed, lots are drawn with equal probabilities. Winnie says that since they are in his house and the balloon is his, then he should have at least one and a half votes, while the others have one each, and the friends agree. Eeyore says that since he is the eldest, he will name his choice first, Piglet after him, and then the youngest Winnie, and the friends agreed. Then Winnie thought and announced that instead of voting, he would throw a die with three sides - equally likely on Rutabaga, Cabbage, Honey.

1. Did Winnie the Pooh act rationally when he refuses the choice and behaves randomly, and why?

2. Compared to this random choice, how many nuts would Winnie the Pooh give the host for giving him, Winnie, the first order to make the choice?

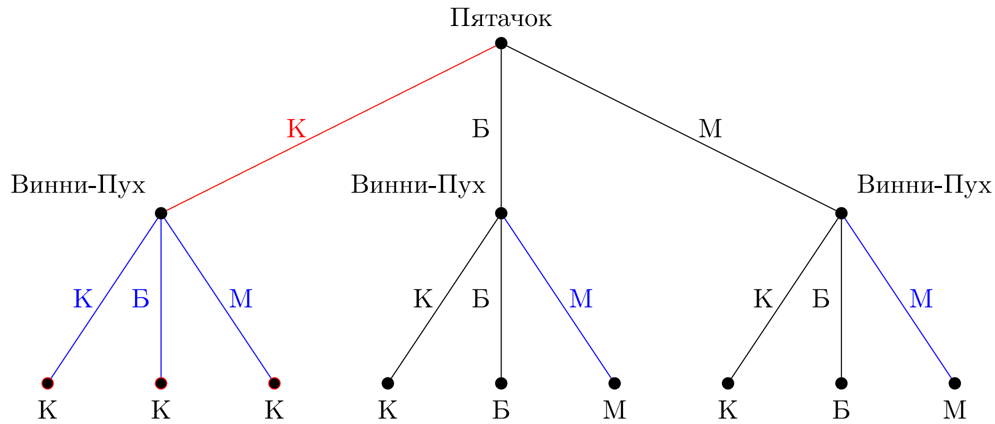
Решение.

Будем обозначать в решении Капусту буквой (К), Брюкву буквой (Б), Мед буквой (М).

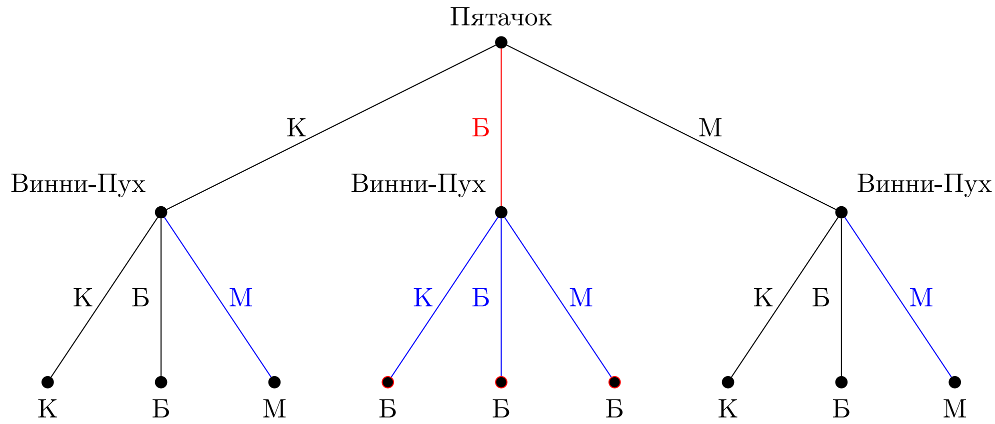
Игрок	Предпочтения	Ценность М	Ценность Б	Ценность К
Винни-Пух	М≻Б≻К	10	5	0
Пятачок	Б≻К≻М	0	-	-
Иа-Иа	К≻М≻Б	-	0	-

Последовательность ходов: Иа-Иа, Пятачок, Винни-Пух.

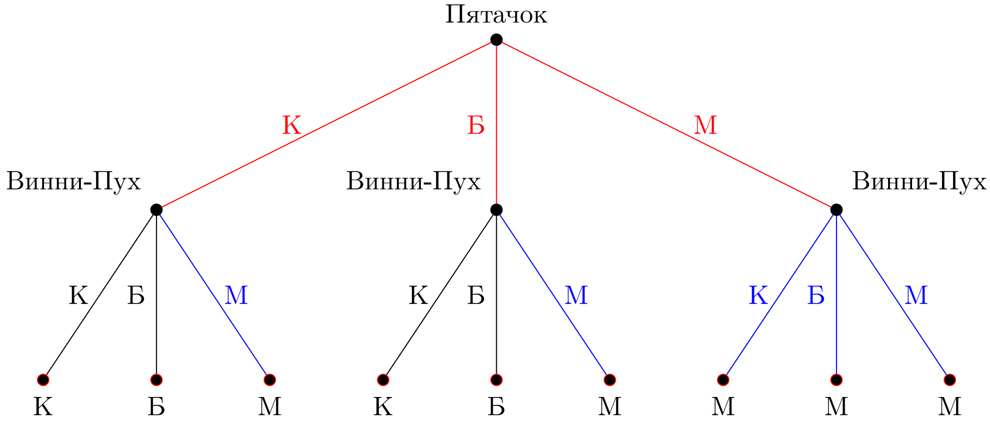
1. Рассмотрим игру, когда Винни-Пух голосует, а не подбрасывает кубик. Пусть Иа-Иа выбрал капусту (К), тогда часть дерева игры будет выглядеть так.



Пусть Иа-Иа выбрал брюкву (Б), тогда часть дерева игры будет выглядеть так.

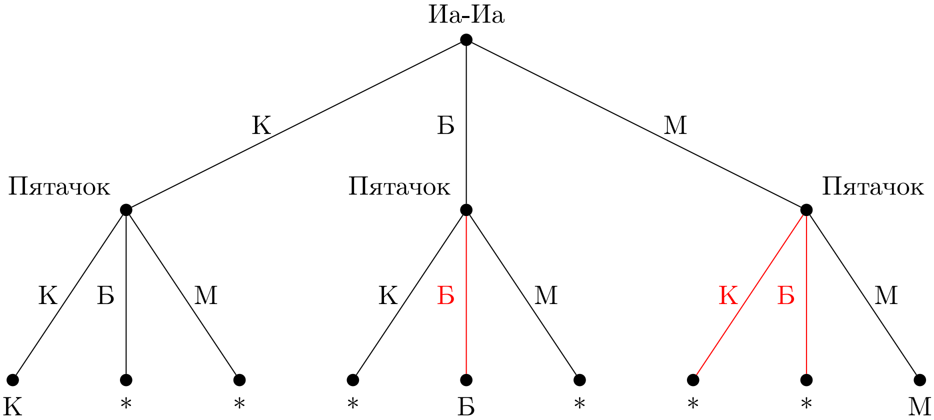


Пусть Иа-Иа выбрал мед (М), тогда часть дерева игры будет выглядеть так.



Как видим, выбор Иа-Иа определяет исход игры, поэтому Иа-иа выберет капусту (К), которую предпочитает всему остальному. Получается, что победит наихудшая альтернатива для Винни-Пуха, а значит, он не сможет сделать себе хуже, делая выбор случайно.

Рассмотрим игру, когда Винни-Пух подбрасывает кубик. Здесь (*) обозначены ситуации, когда исход голосования определяет кубик.



Отдельно рассмотрим ситуацию, когда Иа-Иа выбрал капусту (К). В ней Пятачок делает выбор между капустой (К) и случайным исходом, в котором равновероятно может получиться либо капуста (К), либо брюква (Б), либо мед (М). Пятачок выберет капусту (К), только если

$$U_p(\text{К}) > \frac{1}{3}(U_p(\text{К}) + U_p(\text{Б}) + U_p(\text{М})) \tag{4}$$

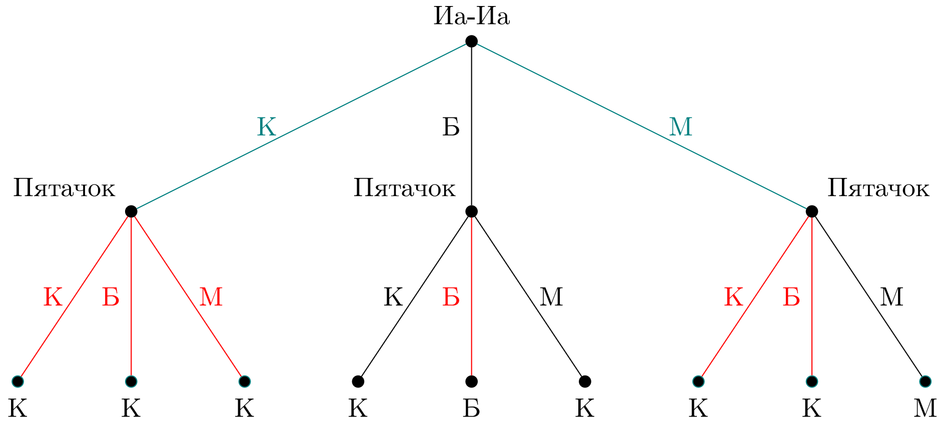
Откуда получаем соотношение $2U_p(\text{К}) > U_p(\text{Б})$. В таком случае Пятачок выберет капусту (К), если Иа-Иа выбрал капусту (К). А любитель капусты (К) Иа-Иа выберет капусту на первом шаге. Винни-Пуху не станет лучше, но и не станет хуже.

Если же $2U_p(\text{К}) < U_p(\text{Б})$, то в таком случае Пятачок с любой вероятностью $p \in [0; 1]$ будет выбирать брюкву (Б) или мед (М), если Иа-Иа выбрал капусту (К). Тогда Иа-Иа все равно выбирать капусту (К) или мед (М), а исход определится кубиком. Получается, что в этом случае Винни-Пуху станет лучше.

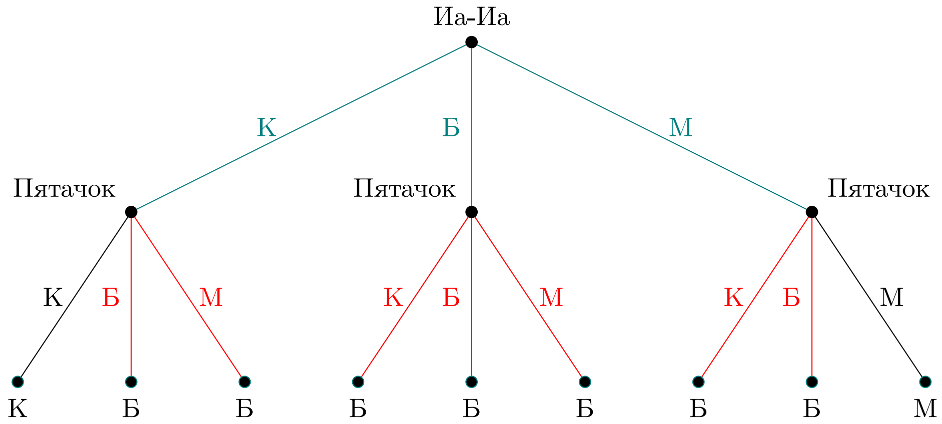
Если же $2U_p(\text{К}) = U_p(\text{Б})$, то в таком случае Пятачоку все равно, что играть, если Иа-Иа выбрал капусту (К). Пусть p_c — вероятность, которой Пятачок выбирает капусту (К) в этом случае. Тогда Иа-Иа будет выбирать капусту (К), если $p_c \neq 0$. А если $p_c = 0$, то ситуация аналогична предыдущему рассмотренному случаю. Получается, что в этом случае Винни-Пуху станет не хуже. Ему будет также, если $p_c = 1$, и лучше в любом другом случае.

Итак, Винни-Пуху не становится хуже от переключения с голосования на бросок кубика, а значит, он поступил рационально.

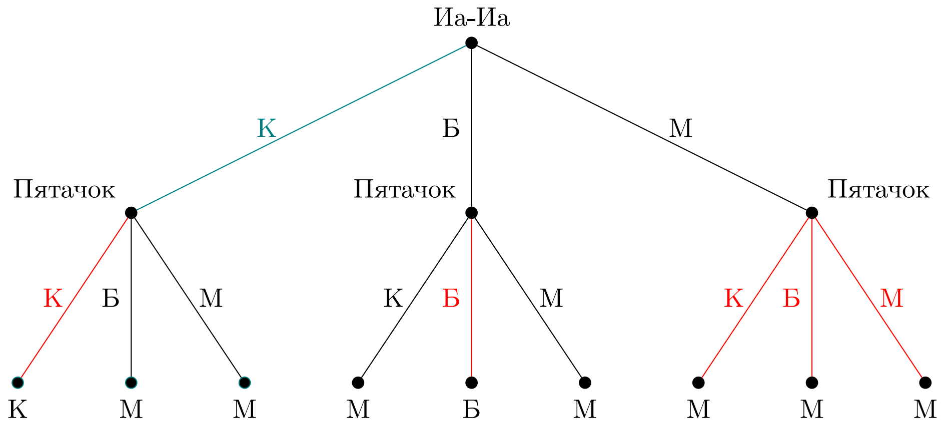
2. Рассмотрим игру, когда Винни-Пух ходит первым. Пусть Винни-Пух выбрал капусту (К), тогда часть дерева игры будет выглядеть так.



Пусть Винни-Пух выбрал брюкву (Б), тогда часть дерева игры будет выглядеть так.



Пусть Винни-Пух выбрал мед (М), тогда часть дерева игры будет выглядеть так.



Получается, что только проголосовав за брюкву (Б) Винни-Пух получит исход лучше, чем капуста (К). В таком случае он получит полезность 5. В ситуации с кубиком он мог получать от 0 до 5 в зависимости от полезности Пяточка и, соответсвенно, исхода. Получается, что он готов заплатить от 0 до 5 орешков за право голосовать первым, в зависимости от соотношения полезностей Пяточка.

Критерии.

- **4 балла** за рассмотрение голосования, в котором Винни голосует, а не кидает кубик
  - по 1 баллу за рассмотрение каждой из 3х частей дерева
  - 1 балл за оптимальный выбор Иа-Иа при таком голосовании
- **1 балл** за тезис о том, что при таком голосовании побеждает наихудшая альтернатива для Винни-Пуха
- **4 балла** за рассмотрение голосования, в котором Винни кидает кубик
  - 1 балл за составление неравенства для выбора Пяточка в случае, когда Иа-Иа выбрал капусту (К)
  - по 1 баллу за рассмотрение каждого из 3х случаев и реализацию игры в нем
- **1 балл** за ответ про рациональность Винни Пуха, основанный на верном анализе изменения его полезности
- **4 балла** за рассмотрение голосования, в котором Винни ходит первым
  - по 1 баллу за рассмотрение каждой из 3х частей дерева
  - 1 балл за оптимальный выбор Винни при таком голосовании и полезность, которую он в таком случае получает
- **1 балл** за ответ

Комментарий по проверке: Баллы за рассмотрение голосования, в котором Винни кидает кубик не ставились, если оно было не рассмотренно или было рассмотренно неверно. За введение предпосылки о том, что у Пяточка и Иа-Иа полезности устроены также как и у Винни-Пуха снималось 2 балла.