Решения заданий заключительного этапа
по направлению «Физика»

Задания по направлению состояли только из инвариантной части. Для того, чтобы претендовать на статусы медалиста, дипломанта I, II, III степени, участникам необходимо набрать наибольшее число баллов за все задания.

Номер задания	Максимальный балл	Учёт в рейтинге по направлению
1	20	✓
2	20	✓
3	20	✓
4	20	✓
5	20	✓

Задача 1

Каково относительное изменение частоты колебаний маятника с длиной нити l, расположенного на экваторе, за счет воздействия Луны? Какова периодичность этих изменений?

Решение задачи 1

Частота колебаний маятника определяется известной формулой $\omega=\sqrt{g/l}$, где g — ускорение свободного падения. Луна обладает гравитационным полем, которое вносит вклад в ускорение свободного падения на поверхности Земли. На маятник, установленный на поверхности Земли, воздействует разность ускорения свободного падения поля Луны в той точке, где находится маятник, и ускорения Земли, как целого, в поле Луны. Последнее с хорошей точностью равно ускорению свободного падения поля Луны в центре Земли. Таким образом, на маятник воздействует дополнительное ускорение свободного падения

$$\mathbf{g}_1=-\frac{GM\left(\mathbf{r}+\mathbf{R}\right)}{\left|\mathbf{r}+\mathbf{R}\right|^3}+\frac{GM\,\mathbf{r}}{r^3},$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса Луны, $\mathbf{r}$ — вектор с началом в центре Луны и с окончанием в центре Земли, $\mathbf{R}$ — вектор с началом в центре Земли и с окончанием в точке расположения маятника. Поскольку радиус Земли R много меньше расстояния до Луны r, то приведенное выражение приблизительно равно

$$\mathbf{g}_1=-\frac{GM\,\mathbf{R}}{r^3}+3\frac{GM\mathbf{r}\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}\right)}{r^5}.$$

Входящее в выражение для частоты $\omega=\sqrt{g/l}$ ускорение свободного падения равно $\mathbf{g}=\mathbf{g}_0+\mathbf{g}_1$, где $\mathbf{g}_0$ — ускорение свободного падения поля Земли. Чтобы найти поправку $\delta g=g-g_0$, следует спроектировать $\mathbf{g}_1$ на направление ускорения $\mathbf{g}_0$, которое направлено к центру Земли, то есть направлено вдоль $-\mathbf{R}$. В результате находим

$$\delta g = \frac{GMR}{r^3}\left(1-3\cos^2\theta\right),$$

где θ — угол между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$. Периодичность изменения этой величины — около 12 часов (с точностью до поправок, связанных с вращением Луны вокруг Земли). Оценка для относительной поправки имеет вид

$$\delta g/g_0 \sim \frac{GMR}{g_0 r^3} = \frac{MR^3}{M_0 r^3},$$

где M_0 — масса Земли. Отношение масс равно приблизительно 0.012, $R \approx 6.4\cdot 10^3$, $r \approx 3.8\cdot 10^5$. Поэтому

$$\delta g/g_0 \sim 10^{-7}.$$

Отношение частоты ω - частота колебания маятника, под воздействием Луны, ω_0 — частота колебания маятника без воздействия Луны.

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{g}{g_0}} = \sqrt{\frac{g_0+\delta g}{g_0}} = \sqrt{1+\frac{\delta g}{g_0}} = 1+\frac{\delta g}{2g_0},$$

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{\delta g}{2g_0}, \qquad \frac{\delta\omega}{\omega_0} \sim 10^{-7}.$$

Критерии	Баллы
Правильно указаны источники изменения ускорения свободного падения на поверхности Земли	4
Записано выражение для дополнительного ускорения свободного падения из-за воздействия Луны	7
Получено выражение для абсолютного значения поправки к ускорению свободного падения	4
Получен период колебаний частоты маятника	1
Получено относительное изменение ускорения свободного падения	2
Получено относительное изменение частоты	2

Задача 2

Найти реактивную силу, которая действует на помещенный в вакуум сосуд за счет вылета из него в вакуум молекул газа через малое отверстие (меньше длины свободного пробега) площади S. Сосуд содержит газ с плотностью массы ρ и температурой T , масса молекулы газа равна m. Распределение молекул газа по скоростям считать Максвелловским.

Решение задачи 2

Выберем ось координат, проходящую через отверстие перпендикулярно стенке сосуда. Обозначим v скорость молекулы газа в направлении этой оси.

Распределение вероятности этих молекул по скоростям

$$P=\sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right),\quad \int_{-\infty}^{\infty} dv\, P=1.$$

Нас интересуют только молекулы, вылетающие через отверстие, для них $v>0$.

Число молекул со скоростями в интервале dv, которые подлетают к отверстию в единицу времени, равно $(\rho/m)SvPdv$. Следовательно, за единицу времени вылетает N молекул:

$$N=\frac{\rho}{m}S\int_0^{\infty} dv\, v\, P=\sqrt{\frac{2k_B T}{2\pi m}}\frac{\rho}{m}S.$$

Реактивная сила F определяется уносимым молекулами импульсом в единицу времени. Импульс молекулы равен mv, то есть сила равна

$$F=\rho S\int_0^{\infty} dv\ v^2 P=\frac{\rho}{m}k_B TS.$$

Критерии	Баллы
Верно записано распределение Больцмана (Максвелла)	6
Верно записано выражение для количества молекул, улетающих через отверстие за единицу времени	6
Взят интеграл, получено в явном виде формула для количества молекул, улетающих через отверстие за единицу времени	2
Записано выражение для реактивной силы	5
Получен окончательный ответ	1

Задача 3

Точеный заряд величины q помещен в слабый электролит, длина Дебая в котором равна l. Заряд находится на расстоянии R от поверхности плоской металлической пластины. Найти силу притяжения точеного заряда к пластине. Относительную диэлектрическую проницаемость электролита считать равной единице.

Решение задачи 3

Потенциал электрического поля, который создает точечный заряд в неограниченном электролите, равен

$$\varphi = \frac{q}{r}\exp\left(-r/l\right).$$

В присутствии металлической пластины на ее поверхности индуцируется заряд, поле которого эквивалентно полю «заряда-отражения», который находится симметрично реальному под поверхностью пластины и имеет заряд $-q$. Это объясняется тем, что потенциал суперпозиции полей реального заряда и «заряда-отражения» равен нулю на поверхности пластины. Введем ось Z, направленную перпендикулярно пластине и проходящую через заряды. Поместим начало координат в точку, где расположен «заряд-отражение». Создаваемый им (то есть индуцированным зарядом пластины) потенциал на оси Z равен

$$\varphi_2 = -\frac{q}{z}\exp\left(-z/l\right).$$

Напряженность этого поля

$$E_z = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = -q\frac{l+z}{z^2}\exp\left(-z/l\right).$$

Таким образом, сила притяжения равна

$$F = qE_z = -q^2\frac{l+2R}{R^2}\exp\left(-2R/l\right),$$

где мы подставили расстояние между зарядами $z = 2R$, а знак минус соответствует притяжению.

Критерии	Баллы
Записан потенциал точечного заряда в электролите	5
Сказано в явном виде, что поле от заряда на металлической пластине эквивалентно полю точечного заряда-отражения	5
Записан потенциал точечного заряда-отражения	2
Определена напряженность электрического поля от заряда-отражения	5
Получен ответ	3

Задача 4

Электрон вращается со скоростью v_0 во внешнем однородном магнитном поле с индукцией B. Найти закон, по которому его скорость будет уменьшаться со временем за счет излучения.

Решение задачи 4

В системе СГС мощность излучения точечного заряда

$$I = \frac{2e^2a^2}{3c^3},$$

где e - величина заряда, a — ускорение, c — скорость света. В той же системе СГС ускорение электрона равно

$$a = \frac{e}{m}\frac{v}{c}B,$$

где m - его масса. Поэтому мощность излучения равна

$$I = \frac{2e^4v^2B^2}{3m^2c^5}.$$

Эта величина равна потери энергии

$$\frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2} = -I,$$

то есть

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{2e^4vB^2}{3m^3c^5}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$v = v_0 \exp\left[-\frac{2e^4B^2}{3m^3c^5}t\right].$$

Критерии	Баллы
Записано ускорение, с которым движется электрон	3
Записано выражение для мощности излучения	8
Получено дифференциальное уравнение для убывания энергии или скорости электрона	6
Получен ответ	3

Задача 5
Квантовая частица массы m, совершающая одномерное движение, находится в основном состоянии в поле с потенциалом $U = m\omega^2 x^2/2$. В некоторый момент времени потенциал мгновенно меняется на $U = m\omega^2 (x-l)^2/2$. Найти вероятность того, что частица окажется в основном состоянии в новом потенциале.

Решение задачи 5
Волновая функция основного состояния осциллятора до изменения частоты имела вид

$$\Psi_1 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right).$$

После изменения функция основного состояния осциллятора стала

$$\Psi_2 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-l)^2\right].$$

Проекция состояния Ψ_1 на состояние Ψ_2 равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \Psi_1\Psi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)\cdot \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-l)^2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}\left(x-\frac{l}{2}\right)^2\right]\cdot \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\frac{3l^2}{2}\right).$$

Вероятность оказаться в основном состоянии Ψ_2 равна квадрату этого выражения, то есть

$$\exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}l^2\right).$$

Критерии	Баллы
Записана волновая функция основного состояния осциллятора в исходном состоянии	7
Записана волновая функция основного состояния осциллятора после сдвига	3
Найдена проекция одного состояния на другое	8
Получен ответ	2