

**Критерии оценивания заданий заключительного этапа
по направлению «Экономика»**

Задания по направлению состояли из двух частей: инвариантной (обязательной для всех участников) и вариативной (разделённой на треки). Для того, чтобы претендовать на статусы дипломанта I, II, III степени, участникам необходимо набрать наибольшее число за задания, учитываемые в рейтинге по конкретным трекам. Для того, чтобы стать медалистом, участникам необходимо успешно выполнить задания по двум трекам.

Номер задания	Максимальный балл	Учёт в рейтинге по треку «Финансовая экономика»	Учёт в рейтинге по треку «Экономика»
1	25	✓	✓
2	25	✓	✓
3	20	✓	
4	20	✓	
5	10	✓	
6	10		✓
7	15		✓
8	10		✓
9	15		✓

Решения и критерии оценивания заданий инвариантной части и каждого трека опубликованы на следующих страницах.

Инвариантная часть

№ 1

Consider an open economy with sticky prices and sticky nominal wages and imperfect capital mobility, where equilibrium can be described by the IS-LM-BP model, characterized by the following equations:

Consumption function is given by $C = 40 + 0,8Y^d$, where Y^d is the disposable income; net tax revenues are constant, $T = 25$;

Investment function is given by $I = 20 - 4i$, where i is the interest rate. The expected inflation is equal to zero, so nominal interest rate equals real interest rate;

Government purchases $G = 30$;

Export function is given by $Ex = 20 + 4E$, where E is the exchange rate (the price of foreign currency in units of domestic currency);

Import function is given by $I_m = 10 + 0,2Y$;

The demand function for real money balances is given by $L(Y, i) = 0,5Y - 2i$, where Y is output (gross domestic product);

Nominal money supply is equal to $M^s = 80$;

Price level is constant at $P = 2$;

Capital account balance is determined by the equation $CF = 2(i - i^f) + 2,4$, where i^f is the foreign interest rate, $i^f = 5$.

a) (6 points) Explain intuitively the following characteristics of the functions given above:

- exports depend positively on the exchange rate;
- imports do not depend on the exchange rate;
- capital account balance depends positively on the interest rate differential $i - i^f$.

b) (5 points) Write the equations of IS, LM and BP curves. Find equilibrium output, interest rate and exchange rate. Illustrate the equilibrium graphically in $(Y; i)$ space.

c) (5 points) Let's consider a situation, when this economy is in equilibrium and some of its trading partners have stopped trading with it because of economic sanctions, so the import function is now given by $I_m = 6 + 0,2Y$. How does this change (all other things being equal) influence the position of IS and BP curves in $(Y; i)$ space? Illustrate on your graph from b). How does this change influence the equilibrium exchange rate? You are not required to calculate the exact change in the equilibrium exchange rate; just explain intuitively, rely on the mechanisms in this specification of IS-LM-BP model.

d) (4 points) Let's suppose that the central bank intervenes and changes money supply for the exchange rate to stay the same, since the change in exchange rate influences inflation. How should the central bank change the money supply? Explain intuitively, rely on the mechanisms in this specification of IS-LM-BP model. Similar to c), you are not required to calculate the exact change in the money supply, just provide an intuitive explanation.

e) (5 points) What are the negative effects of the policy that you consider in d), if the central bank follows inflation targeting policy? Provide two explanations. In case more than two explanations are provided, only the first two will be estimated.

Решение и критерии

a) С увеличением валютного курса растёт цена иностранной валюты в единицах отечественной валюты, соответственно растёт конкурентоспособность отечественных товаров на мировом рынке (они дешевле относительно иностранных) и экспорт растёт – 2 балла

Увеличение валютного курса создаёт два эффекта на импорт: его увеличение (в денежном выражении) из-за удорожания импортных товаров и его уменьшение из-за сокращения объёмов импорта. Раз импорт не зависит от валютного курса – данные эффекты компенсируют друг друга (спрос на импорт обладает единичной эластичностью) – 2 балла

Увеличение $i - i^f$ означает, что отечественные финансовые активы становятся более привлекательными относительно иностранных, из-за чего спрос на отечественные финансовые активы растёт, что вызывает приток капитала и увеличение сальдо счёта движения капитала – 2 балла

b) Выведем уравнения кривых IS, LM, BP :

$$\begin{cases} IS: Y = C + I + G + Xn \\ LM: \frac{M^s}{P} = L(Y, i) \\ BP: Xn + CF = 0 \end{cases} \quad - 1 \text{ балл}$$

Подставив данные из условия, после преобразований получаем:

$$\begin{cases} IS: Y = 200 - 10i + 10E \\ LM: Y = 80 + 4i \\ BP: Y = 12 + 20E + 10i \end{cases} \quad - 1 \text{ балл}$$

Тогда в равновесии $Y = 116,24; i = 9,06; E = 0,68$ – 1 балл

Графическая иллюстрация – 1 балл

Заметим, что в координатах $(Y; i)$ наклон кривой LM равен $\frac{1}{4}$, а наклон кривой BP равен 0,1, соответственно BP положе LM – 1 балл

с) Кривые IS и BP сдвинутся вправо – 1 балл

Точка пересечения кривых IS и LM точно будет выше новой кривой BP, соответственно будет наблюдаться избыточный спрос на отечественную валюту и валютный курс уменьшится – 2 балла

Из-за падения спроса на импорт упал спрос на иностранную валюту, поэтому произойдёт удешевление иностранной валюты и удорожание отечественной валюты – 2 балла

d) Центральный банк предъявит спрос на иностранную валюту – 2 балла, из-за чего денежная масса увеличится – 1 балл

Увеличение денежной массы приведёт к сдвигу LM вниз и за счёт этого экономика придёт в равновесие – 1 балл

e) Уменьшится доверие к центральному банку, т.к. центральный банк отклонится от таргетирования инфляции, пытаясь сгладить колебания валютного курса

Рост денежной массы также вызовет рост инфляции

Одна корректная причина с обоснованием – 3 балла, две корректных причины с обоснованием – 5 баллов

№ 2

Consider an economy with one aggregate consumer and two producers. The consumer derives utility from a consumer good, c , leisure, l , and another good, g , that will either be purchased in the market or solely provided by the government: $u(c, l, g) = clg$. There are no endowments of consumer goods (or money). The consumer has an endowment of time \bar{L} , which is allocated between leisure and time to work (labour supply).

The markets are assumed to be competitive. The only factor of production is labour. The production functions for c and g are given by: $C = \sqrt{L_C}$ and $G = \sqrt{L_G}$, where C is the produced amount of good c , G is the produced amount of good g , L_C and L_G denote the amount of labour used for production of goods c and g , respectively. The only tax in this economy is a proportional income tax levied at the rate τ on all consumer's incomes (thus leaving the consumer with a share $(1 - \tau)$ of his income.) The price of c is normalized to 1. Let w denote the price of labour, and p denote the price of good g .

In a) and b) assume that tax revenue is returned to the consumer as a lump-sum subsidy.

a) (5 points) Find the demand function for c , l , and g . (Hint: pay attention that the firms' profit and the lump-sum subsidy are taken by the consumer as given. So if you get the demand functions that are independent of τ that would be a mistake.)

b) (10 points) Find a Walrasian equilibrium in the economy in question. Get the tax revenue function (dependence of tax revenue collected by the government on the tax rate τ) and sketch the Laffer curve.

c) (8 points) Assume now that the government uses tax revenues to finance the provision of good g . It means that the product pg is equal to the tax revenue collected by the government. The consumer takes the consumption of good g as fixed and maximizes its utility function in this constrained fashion (i.e. the consumer chooses only c and l). Find a Walrasian equilibrium in the economy in question. Get the tax revenue function (dependence of tax revenue collected by the government on the tax rate τ) and sketch the Laffer curve.

d) (2 points) Compare Laffer curves in b) and c). Give an intuitive explanation for the result you obtained.

1

Решение

а) Поскольку прибыль фирм входит в доход единственного в экономике потребителя, начнём с решения задач фирм.

Задача фирмы, производящей благо g , имеет следующий вид:
$$\begin{cases} \pi_G = pG - wL_G \rightarrow \max_{G, L_G \geq 0} \\ G = \sqrt{L_G} \end{cases}$$
. Задача

может быть записана в следующем виде: $p\sqrt{L_G} - wL_G \rightarrow \max_{L_G \geq 0}$. Условие первого порядка для

внутреннего решения записывается следующим образом: $\frac{p}{2\sqrt{L_G}} - w = 0$.² Поскольку вторая

производная целевой функции меньше нуля, целевая функция строго вогнута, а значит условие первого порядка является не только необходимым, но и достаточным. Таким образом, из условия

¹ Задание по статье Gahvari F. The nature of government expenditures and the shape of the laffer curve // Journal of Public Economics, 1989, vol. 40, pp. 251-260.

² Решение задачи максимизации прибыли фирмы при указанной производственной функции всегда будет внутренним. См., например, Левина Е.А., Покатович Е.В. Микроэкономика рыночного равновесия. М.: ИД ВШЭ, 2020. Пример 3.2.

первого порядка найдем объем выпускаемой продукции $G = \sqrt{L_G} = \frac{p}{2w}$ и объем затрачиваемого труда $L_G = \frac{p^2}{4w^2}$. Прибыль фирмы составляет $\pi_G = \frac{p^2}{4w}$. Поскольку технология производства блага c аналогична, то сразу можем записать и решение задачи максимизации прибыли производства этого блага: $C = \sqrt{L_C} = \frac{1}{2w}$, $L_C = \frac{1}{4w^2}$, $\pi_C = \frac{1}{4w}$.

Теперь рассмотрим непосредственно задачу потребителя. Доход потребителя составляет $w(\bar{L} - l) + \pi_G + \pi_C$. Потребителю остается $(1 - \tau)$ от дохода после уплаты налога, а доля τ собирается в качестве налога и передается в виде паушальной (аккордной) субсидии потребителю. Величина этой субсидии составляет

$$S = \tau(w(\bar{L} - l) + \pi_G + \pi_C) = \tau \left(w(\bar{L} - l) + \frac{p^2}{4w} + \frac{1}{4w} \right).$$

Таким образом, уравнение бюджетной линии может быть записано следующим образом: $c + pg = (1 - \tau)(w(\bar{L} - l) + \pi_G + \pi_C) + S$. Перенеся слагаемое $(1 - \tau)wl$ в левую часть, преобразуем уравнение бюджетной линии к следующему виду: $(1 - \tau)wl + c + pg = (1 - \tau)(w\bar{L} + \pi_G + \pi_C) + S$.

Задача потребителя может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} lcg \rightarrow \max_{l, c, g \geq 0} \\ (1 - \tau)wl + c + pg \leq (1 - \tau)(w\bar{L} + \pi_G + \pi_C) + S \end{cases}.$$

Предпочтения потребителя представимы функцией полезности Кобба-Дугласа, когда степени, в которые возводятся количества благ, равны. Это означает, что потребитель тратит одинаковые доли дохода на каждое благо.

Таким образом, объем спроса на досуг вычисляется следующим образом

$$l = \frac{(1 - \tau)(w\bar{L} + \pi_G + \pi_C) + S}{3(1 - \tau)w}. \quad \text{Подставив значение } S, \quad \text{получим}$$

$$l = \frac{(1 - \tau)(w\bar{L} + \pi_G + \pi_C) + \tau(w(\bar{L} - l) + \pi_G + \pi_C)}{3(1 - \tau)w}.$$

Полученное выражение может быть записано в

следующем виде: $l = \frac{w\bar{L} + \pi_G + \pi_C - \tau wl}{3(1 - \tau)w}$, откуда найдем функцию спроса на досуг со стороны

$$\text{потребителя: } l = \frac{w\bar{L} + \pi_G + \pi_C}{(3 - 2\tau)w}.$$

Аналогично, объем спроса на благо c записывается следующим образом:

$$c = \frac{(1 - \tau)(w\bar{L} + \pi_G + \pi_C) + S}{3}.$$

Как и в случае с временем на досуг, подставим значение S :

$$c = \frac{w\bar{L} + \pi_G + \pi_C - \tau wl}{3}.$$

Поскольку функция спроса на досуг уже найдена, подставим её в

полученное выражение: $c = \frac{w\bar{L} + \pi_G + \pi_C - \tau w \frac{w\bar{L} + \pi_G + \pi_C}{(3-2\tau)w}}{3}$. После преобразования получим

функцию спроса на благо c : $c = \frac{(1-\tau)(w\bar{L} + \pi_G + \pi_C)}{3-2\tau}$.

Объем спроса на благо g записывается следующим образом: $g = \frac{(1-\tau)(w\bar{L} + \pi_G + \pi_C) + S}{3p}$.

Подставив выражение для S , а затем для l , получим: $g = \frac{w\bar{L} + \pi_G + \pi_C - \tau w \frac{w\bar{L} + \pi_G + \pi_C}{(3-2\tau)w}}{3p}$.

Преобразовав, найдем функцию спроса на g : $g = \frac{(1-\tau)(w\bar{L} + \pi_G + \pi_C)}{(3-2\tau)p}$.

b) Поскольку начального запаса благ c и g в экономике нет, в равновесии объем спроса должен быть равен объему, производимому фирмами.

Запишем условия уравниваемости рынков c и g : $\frac{(1-\tau)(w\bar{L} + \pi_G + \pi_C)}{3-2\tau} = \frac{1}{2w}$ и

$\frac{(1-\tau)(w\bar{L} + \pi_G + \pi_C)}{(3-2\tau)p} = \frac{p}{2w}$. Следовательно, в равновесии выполнено $\frac{1}{2wp} = \frac{p}{2w}$, откуда $p^2 = 1$, а значит $\tilde{p} = 1$.

Воспользуемся любым из записанных условий, чтобы найти ставку заработной платы:

$$\frac{(1-\tau)\left(w\bar{L} + \frac{1}{4w} + \frac{1}{4w}\right)}{3-2\tau} = \frac{1}{2w}, \text{ откуда } \tilde{w} = \frac{\sqrt{2-\tau}}{\sqrt{2(1-\tau)\bar{L}}}.$$

Подставим найденные цены в функции предложения C и G , чтобы найти равновесные значения соответствующих переменных: $\tilde{C} = \tilde{c} = \tilde{G} = \tilde{g} = \frac{\sqrt{(1-\tau)\bar{L}}}{\sqrt{2(2-\tau)}}$. Подставив цены в функции спроса

фирм на труд, найдем равновесный объем затрачиваемого фирмами времени на производство:

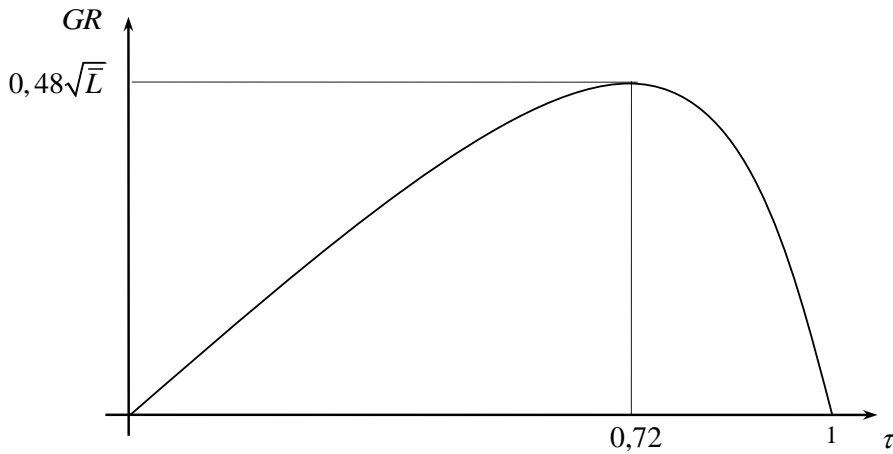
$\tilde{L}_G = \tilde{L}_C = \frac{(1-\tau)\bar{L}}{2(2-\tau)}$. Поскольку в экономике рынки должны быть сбалансированы, в том числе

рынок времени (труда), то можем воспользоваться условием уравниваемости $\tilde{l} + \tilde{L}_G + \tilde{L}_C = \bar{L}$,

чтобы найти \tilde{l} : $\tilde{l} = \frac{\bar{L}}{2-\tau}$. Или же можно найти величину \tilde{l} , подставив цены в функцию спроса.

Выразим налоговые сборы: $GR = S = \tau(w(\bar{L}-l) + \pi_G + \pi_C) = \tau\left(w(\bar{L}-l) + \frac{p^2}{4w} + \frac{1}{4w}\right) =$

$$= \tau\left(\frac{\sqrt{2-\tau}}{\sqrt{2(1-\tau)\bar{L}}} \frac{(1-\tau)\bar{L}}{2-\tau} + \frac{\sqrt{(1-\tau)\bar{L}}}{\sqrt{2(2-\tau)}}\right) = \tau \frac{\sqrt{2(1-\tau)\bar{L}}}{\sqrt{2-\tau}}.$$



с) Решение задач фирм не изменится. Поскольку потребитель теперь не выбирает объем потребления g , задача потребителя может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} lc\bar{g} \rightarrow \max_{l,c \geq 0} \\ (1-\tau)wl + c \leq (1-\tau)(w\bar{L} + \pi_G + \pi_C) \end{cases} . \text{ Тогда объем спроса на отдых } (l) \text{ и потребительское благо } (c)$$

) вычисляется следующим образом: $l = \frac{(1-\tau)(w\bar{L} + \pi_G + \pi_C)}{2(1-\tau)w} = \frac{w\bar{L} + \frac{p^2}{4w} + \frac{1}{4w}}{2w}$ и

$$c = \frac{(1-\tau)(w\bar{L} + \pi_G + \pi_C)}{2} = \frac{(1-\tau) \left(w\bar{L} + \frac{p^2}{4w} + \frac{1}{4w} \right)}{2} .$$

Найдем спрос на благо g со стороны государства. Затраты на покупку блага g должны быть равны доходам государства: $pg = \tau(w(\bar{L} - l) + \pi_G + \pi_C)$. Подставим спрос потребителя на отдых:

$$pg = \tau \left(w \left(\bar{L} - \frac{w\bar{L} + \pi_G + \pi_C}{2w} \right) + \pi_G + \pi_C \right) = \tau \frac{w\bar{L} + \pi_G + \pi_C}{2} . \text{ Таким образом, } g = \tau \frac{w\bar{L} + \frac{p^2}{4w} + \frac{1}{4w}}{2p} .$$

Запишем условия уравновешенности рынков блага c и блага g : $\frac{(1-\tau) \left(w\bar{L} + \frac{p^2}{4w} + \frac{1}{4w} \right)}{2} = \frac{1}{2w}$ и

$$\tau \frac{w\bar{L} + \frac{p^2}{4w} + \frac{1}{4w}}{2p} = \frac{p}{2w} . \text{ Из этих условий следует, что } \frac{1}{1-\tau} = \frac{p^2}{\tau} , \text{ откуда } \bar{p} = \sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}} . \text{ Подставим}$$

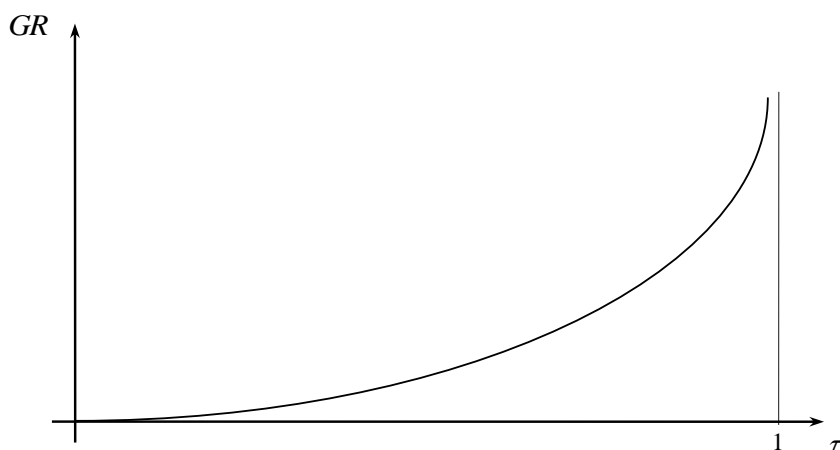
найденную цену p в одно из указанных условий уравновешенности, чтобы найти ставку

заработной платы: $\bar{w} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{(1-\tau)\bar{L}}} .$

Теперь можем найти равновесное распределение. $\bar{C} = \bar{c} = \sqrt{\frac{(1-\tau)\bar{L}}{3}}$, $\bar{G} = \bar{g} = \sqrt{\frac{\tau\bar{L}}{3}}$, $\bar{L}_c = \frac{(1-\tau)\bar{L}}{3}$

, $\bar{L}_G = \frac{\tau\bar{L}}{3}$, $\bar{l} = \bar{L} - \bar{L}_G - \bar{L}_c = \frac{2}{3}\bar{L}$. Тогда доход государства

$$GR = \tau(w(\bar{L} - l) + \pi_c + \pi_G) = \tau \left(\frac{\bar{L}}{3} w + \frac{\sqrt{\bar{L}}}{2\sqrt{3}\sqrt{1-\tau}} \right) = \frac{\tau\sqrt{\bar{L}}}{\sqrt{3}\sqrt{1-\tau}}.$$



d) В случае введения налога (и при фиксированной ставке заработной платы) цена времени на отдых (досуг) снижается (т.е. отказавшись от работы потребитель теряет меньше денег). Снижение цены на благо означает, что в силу действия эффекта замещения спрос на это благо возрастает. Таким образом, эффект замещения «заставляет» увеличивать время на отдых, а значит снижать время на работу, и в случае, когда собранные налоги возвращаются в виде паушальной субсидии, и в случае, когда собранные налоги тратятся на покупку блага. Поскольку предпочтения потребителя представимы функцией полезности Кобба-Дугласа, то все блага являются нормальными. Так как доход после уплаты налога (при фиксированных величинах прибыли) снижается, спрос на досуг снижается как следствие эффекта богатства и поэтому возможны ситуации (как при данных предпочтениях потребителя), когда эффект дохода достаточно сильно модифицирует действие эффекта замены и предложение труда не убывает до нуля. Возвращаемые же потребителю в виде паушальной субсидии собранные налоги ослабляют (фактически элиминируют) действие эффекта замещения, так что фактически доминирует эффект богатства и с ростом ставки налога предложение труда снижается (до нуля). Заменим, что анализ проведен в предположении, что ставка заработной платы и прибыли фиксированы. Но хотя они зависят от ставки налога, качественно результат анализа, как показывает вид соответствующих зависимостей, не меняется.

Критерий

(a) Использован факт (или выведен в ходе решения), что на каждое благо тратится 1/3 дохода (даже если доход неверный) 3 балла

Верное решение 5 баллов

(b) Решение задач фирм 3 балла

Условия уравниваемости рынков 3 балла

Компоненты равновесия 2 балла

Кривая Лаффера 2 балла

(c) Функции спроса потребителя 2 балла

Условия уравновешенности рынков 3 балла

Компоненты равновесия 2 балла

Кривая Лаффера 1 балл

(d) Сравнение кривых в пунктах (b) и (c) 2 балла

Вариативная часть

№ 6

Theoretically, upward and downward shifts in the monetary policy rate exert symmetrical pressure on economic activity. However, some papers show that monetary policy tends to be asymmetrical: monetary tightening leads to a significant contraction of the economy, while monetary easing does not provide significant stimulus to it. Among potential explanations of this phenomenon researchers mention asymmetrical influence of monetary policy on consumption expenditures and stickiness of prices and wages.

a) (5 points) Explain intuitively, how liquidity constraints (credit constraints) can lead to an asymmetrical pressure of monetary policy on consumption expenditures. Is there any possibility of credit rationing in this case? How does it affect the effectiveness of monetary policy in case of tightening and in case of easing? Explain.

b) (3 points) Explain intuitively, how downward price and nominal wage rigidity (prices and nominal wages stick around ceiling, not floor) can lead to an asymmetrical influence of monetary policy on economic activity.

c) (2 points) Which measures can be taken by the government to compensate for low effectiveness of an expansionary monetary policy?

Theoretically, upward and downward shifts in the monetary policy rate exert symmetrical pressure on economic activity. However, some papers show that monetary policy tends to be asymmetrical: monetary tightening leads to a significant contraction of the economy, while monetary easing does not provide significant stimulus to it. Among potential explanations of this phenomenon researchers mention asymmetrical influence of monetary policy on consumption expenditures and stickiness of prices and wages.

a) (5 points) *Explain intuitively, how liquidity constraints (credit constraints) can lead to an asymmetrical pressure of monetary policy on consumption expenditures. Is there any possibility of credit rationing in this case? How does it affect the effectiveness of monetary policy in case of tightening and in case of easing? Explain.*

3 points for the 'liquidity constraints in consumption' explanation: negative monetary stimulus increases interest rate in the economy and so lowers asset prices. So that value of collateral decreases, while cost of credit increases. It means that, some of the consumers are excluded from the credit market. They are unable to smooth consumption during bad times using financial markets. So that economy contracts significantly. That is the way, effect contracting of monetary policy is amplified.

2 points for the 'credit rationing' explanation: credit rationing can occur, as the higher the interest rate, the higher is the default probability. So that, banks will ration credit: volume of credit in the economy will fall (it will be affordable to only small part of potential lenders). Fall in the volume of credit in the economy will negatively affect the aggregate output.

b) (3 points) *Explain intuitively, how downward price and nominal wage rigidity (prices and nominal wages stick around ceiling, not floor) can lead to an asymmetrical influence of monetary policy on economic activity.*

Downward price and nominal wage rigidity means that prices and wages move down more slowly than move up. Moreover, there is a bottom line, which is not crossed by prices and nominal wages. So that negative monetary stimulus if occurs affects not only equilibrium nominal wages and prices, but equilibrium employment and output too. It means, that labor market clears not only by change in nominal wages, but by the change in employment too (2 points). Whereas, positive monetary stimulus will lead to the change in the nominal indicators, without change in the equilibrium employment and output (1 point).

c) (2 points) *Which measures can be taken by the government to compensate for low effectiveness of an expansionary monetary policy?*

1) fiscal stimulus; 2) monetary policy accounting for lags and asymmetry: quantitatively positive and negative stimulus have to be different (to achieve the same change in the output) (2 points).

№ 7

After the end of COVID-19 pandemic many countries faced the need to cut their government spending. However, too rapid government spending contraction can lead to negative consequences for the economy as a whole, and for government debt sustainability in particular.

a) (5 points) *Explain intuitively, how fiscal contraction affects the economy with flexible prices and rigid nominal wages. Use aggregate demand – aggregate supply model. Illustrate your answer with the AD-AS diagram.*

b) (5 points) *Explain intuitively, what constitutes the risk of rapid government spending contraction in relation to debt-to-GDP sustainability. Does population ageing worsen the problem? Explain.*

c) (5 points) *Is there any scope for an expansionary monetary policy to resolve the problem of debt-to-GDP sustainability in the economy with flexible prices and rigid nominal wages? Use aggregate demand – aggregate supply model. Illustrate your answer with the AD-AS diagram.*

a) (5 points) *Explain intuitively, how fiscal contraction affects the economy with flexible prices and rigid nominal wages. Use aggregate demand – aggregate supply model. Illustrate your answer with the AD-AS diagram.*

2 points for the correct graph: (Q, P) coordinates, AS curve with positive slope, AD curve with negative slope. Only ONE downward shift of the AD curve. AS curve does not shift.

3 points for the correct intuition: fiscal contraction leads to the decrease in government budget deficit ($\downarrow G, \uparrow T$), so public and private expenditures fall, so as aggregate expenditures. This leads to the fall in the aggregate output (Price level is unchanged). As prices are flexible, deficit in the goods market will lead to the fall in the price level in the economy ($\downarrow P$).

b) (5 points) *Explain intuitively, what constitutes the risk of rapid government spending contraction in relation to debt-to-GDP sustainability. Does population ageing worsen the problem? Explain.*

One the one hand, cut in the government spending means transition from deficit to surplus, so that fiscal policy can be viewed as sustainable. Moreover, decrease in the aggregate expenditures lead to the fall in the equilibrium interest rate in the short run. Government debt service costs decrease – 2 points.

On the other hand, decrease in the aggregate output affects negatively the ability of the government to collect taxes and repay the existing debt. If the rate of economic growth is lower than the real interest rate, debt-to-GDP ratio will grow exponentially. If the rate economic growth is higher than the real interest rate, debt-to-GDP ratio will stabilize – 2 points.

The population ageing can negatively affect the sustainability of the government debt, as the older is population, the smaller is the rate of economic growth – 1 point.

c) (5 points) Is there any scope for an expansionary monetary policy to resolve the problem of debt-to-GDP sustainability in the economy with flexible prices and rigid nominal wages? Use aggregate demand – aggregate supply model. Illustrate your answer with the AD-AS diagram.

1 point for the correct intuition behind the upward AD shift.

2 points for the correct graph: (Q, P) coordinates, AS curve with positive slope, AD curve with negative slope. Only ONE upward shift of the AD curve. AS curve does not shift.

2 points for the explanation about debt sustainability effect: expansionary monetary policy affects the sustainability of the debt-to-GDP ratio in the following ways: first, decrease in the equilibrium interest rate lowers debt service cost; second, increase in the aggregate output improves (r vs. g) relation; third, increase in the price level can inflate the debt outstanding away.

№ 8

There is a tariff in Russia on parcels received from abroad. Using a microeconomic approach answer the question: how does the customs duty rate affect willingness to evade taxes?

For this purpose, consider a risk-averse buyer whose preferences are represented by an expected utility function. The buyer, whose wealth is $w > 0$, has purchased goods in a foreign online store for the monetary amount of $d > 0$. In accordance with the current legislation, they must declare the purchase and pay customs duty at the rate t for each monetary unit of the purchase, $0 < t < 1$. The buyer may want to decrease his duty payments and therefore indicate an undervalued purchase price in the customs declaration (or not submit a customs declaration at all). However, in case the violation is detected, they will not only have to pay the customs duty in full, but also be fined at the rate s for each undeclared monetary unit of the purchase, $0 < s < 1$, and $0 < t + s < 1$.

Assume that the buyer has a sufficient income to comply with the legal requirements, i.e. $w > d(1 + t + s)$. Let the probability of the customs declaration being checked is equal to π , $\pi \in (0, 1)$, and if the check is performed, then the actual amount of the purchase is guaranteed to be revealed. Assume that the buyer understates the purchase price, but not completely. How will the unpaid amount of money (the amount of underpaid duty) change with a small increase in the customs duty rate t ?

Решение

Обозначим x незадекларированную стоимость покупки. Таким образом, в таможенной декларации указывается сумма $d - x$, $0 \leq x \leq d$. Если будет проведена проверка покупки (это состояние мира наступает с вероятностью π), то богатство индивида составит $w - d - t(d - x) - tx - sx = w - d(1 + t) - sx$. Если же покупка не будет проверена (вероятность этого события $1 - \pi$), то индивид будет иметь богатство $w - d - t(d - x) = w - d(1 + t) + tx$. Таким образом, задача индивида выбрать такую величину x , чтобы достичь максимально возможного уровня ожидаемой полезности: $U(x) = \pi u(w - d(1 + t) - sx) + (1 - \pi)(w - d(1 + t) + tx) \rightarrow \max_{0 \leq x \leq d}$.

Поскольку в условии сказано, что индивид занижает стоимость покупки, но не полностью, то значение искомой переменной удовлетворяет следующему соотношению: $0 < \tilde{x} < d$. Следовательно, величина \tilde{x} удовлетворяет условию первого порядка как равенству: $\pi u'(w - d(1 + t) - s\tilde{x})(-s) + t(1 - \pi)u'(w - d(1 + t) + t\tilde{x}) = 0$.

В задании требуется указать, как будет меняться оптимальная величина незадекларированной покупки при малом увеличении ставки налога t , т. е. определить знак производной $\tilde{x}'(t)$. Взаимосвязь между \tilde{x} и t неявным образом описывается условием первого порядка.

Рассмотрим функцию $\varphi(t, \tilde{x}) = \pi u'(w - d(1 + t) - s\tilde{x})(-s) + t(1 - \pi)u'(w - d(1 + t) + t\tilde{x})$. По условию первого порядка $\varphi(t, \tilde{x}) = 0$, тогда по правилу дифференцирования неявной функции $\tilde{x}'(t) = -\varphi'_t / \varphi'_{\tilde{x}}$.

Найдем производную $\varphi'_{\tilde{x}}$: $\varphi'_{\tilde{x}} = s^2 \pi u''(w - d(1 + t) - s\tilde{x}) + t^2 (1 - \pi) u''(w - d(1 + t) + t\tilde{x})$. Поскольку индивид несклонен к риску, то $u''(\cdot) \leq 0$. Для того, чтобы производная $\tilde{x}'(t)$ была определена, будем считать, что $u''(\cdot) < 0$. Тогда $\varphi'_{\tilde{x}} < 0$. Заметим, что выполнение $\varphi'_{\tilde{x}} < 0$ означает, что функция ожидаемой полезности строго вогнута, а значит выполнено условие второго порядка задачи максимизации ожидаемой полезности.

Найдем φ'_t :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= ds\pi u''(w - d(1 + t) - s\tilde{x}) + (1 - \pi)u'(w - d(1 + t) + t\tilde{x}) + (\tilde{x} - d)t(1 - \pi)u''(w - d(1 + t) + t\tilde{x}) = \\ &= (ds\pi + (\tilde{x} - d)t(1 - \pi))u''(w - d(1 + t) - s\tilde{x}) + (1 - \pi)u'(w - d(1 + t) + t\tilde{x}) = \\ &= (d(s\pi - t(1 - \pi)) + \tilde{x}t(1 - \pi))u''(w - d(1 + t) - s\tilde{x}) + (1 - \pi)u'(w - d(1 + t) + t\tilde{x}) \end{aligned}$$

Поскольку с ростом денежных сумм элементарная функция полезности возрастает, то $(1 - \pi)u'(w - d(1 + t) + t\tilde{x}) \geq 0$.

Попытаемся определить знак первого слагаемого в полученном выражении для $\varphi'_t(\tilde{x})$. Как уже было отмечено, поскольку индивид несклонен к риску, то $u''(\cdot) < 0$. По условию задачи покупатель декларирует не всю стоимость, а значит параметры модели должны удовлетворять условию $t(1 - \pi) > \pi s$.³ Однако эта информация не позволяет определить знак множителя

³ Доказательство этого факта см., например, Левина Е.А., Покатович Е.В. Микроэкономика: учебник и практикум для вузов. М.: Юрайт, 2019, 2023 г.

$((s\pi - t(1 - \pi)) + \tilde{x}t(1 - \pi))$ поскольку два слагаемых имеют разные знаки. Таким образом, можем сделать вывод, что, основываясь на заданной информации, невозможно сделать вывод о том, как изменится утаиваемая сумма с ростом ставки налога t .

Критерий

Богатство индивида в случае, если проверка была проведена и в случае, если проверка не была проведена 2 балла (если не учитывается стоимость покупки, оценка не снижается).

Ожидаемая полезность индивида 2 балла.

Условие первого порядка для задачи покупателя 2 балла.

Дифференцирование условия первого порядка 3 балла.

Вывод 1 балл.

№ 9

Consider a market for a homogeneous good in the home country. There are N domestic firms and one foreign firm in the market. The foreign firm sells all its product in the market. The inverse demand function is linear and decreasing. All firms (domestic and foreign) have constant equal unit costs. The firms are involved in Cournot competition. The foreign firm's imports to the home country are subject to a specific tariff rate of t currency units per unit. Suppose that each firm produces a non-zero output. Before Cournot competition starts K domestic firms involve in a lobbying activity regarding the tariff rate t , where $0 < K < N$. The firms simultaneously and independently choose their lobbying contributions. The tariff rate t is taken to be square root of their total contributions. How does the tariff rate t change as K increases?

Решение

В задаче описана игра, состоящая из двух этапов. Сначала отечественные фирмы выбирают объем средств на лоббирование, а затем все фирмы конкурируют, одновременно и независимо выбирая выпуски. Начнем с последнего этапа, когда фирмы конкурируют по Курно, чтобы понять какой выигрыш от налога получают отечественные фирмы.

По условию обратная функция спроса линейна и убывает. Тогда обратную функцию спроса можно записать следующим образом (для положительных объемов производства): $p(y) = a - by$, где y - совокупный объем продукции на рынке (в том числе и выпущенный иностранной фирмой), $a > 0$, $b > 0$ - параметры.

Запишем задачу отечественной фирмы i , $i = 1, N$: $\pi_i = (a - by)y_i - cy_i \rightarrow \max_{y_i \geq 0}$, где y_i - выпуск фирмы i , c - предельные и средние издержки, $c > 0$.

По условию задачи все фирмы выпускают положительный объем. Условие первого порядка для внутреннего решения (когда выпуск фирмы положительный) имеет вид:

$\pi'_i = a - b \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} y_j - 2by_i - c = 0$. Заметим, что для выполнения этого условия требуется выполнение

соотношения параметров $a > c > 0$. Это условие может быть преобразовано к следующему виду:
 $\pi'_i = a - by - by_i - c = 0, \quad i = 1, N$.

Аналогично, можно записать условие первого порядка задачи максимизации прибыли иностранной фирмы. Оно полностью аналогично условиям первого порядка задач отечественных фирм за исключением того, что предельные издержки увеличены на величину ставки налога:

$\pi'_{N+1} = a - by - by_{N+1} - (c + t) = 0$. Просуммируем все $N + 1$ условия первого порядка:
 $(N + 1)a - (N + 1)by - by - (N + 1)c - t = 0$. Из полученного выражения можем выразить

совокупный объем продукции: $y = \frac{(N + 1)a - (N + 1)c - t}{(N + 2)b}$.

Подставив совокупный объем на рынке в обратную функцию спроса, найдем цену на рынке:

$$p = \frac{a + (N + 1)c + t}{(N + 2)}.$$

Подставив в условия первого порядка, найдем выпуск отечественных фирм: $y_i = \frac{a - c + t}{(N + 2)b}$,

$i = 1, N$, и выпуск иностранной фирмы: $y_{N+1} = \frac{a - c - (N + 1)t}{(N + 2)b}$.

Таким образом, прибыль каждой отечественной фирм составляет $\pi_i = \frac{(a - c + t)^2}{(N + 2)^2 b}$, $i = 1, N$.

Рассмотрим теперь первый этап, на котором K из N фирм могут участвовать в лоббистской деятельности для установления величины ставки налога t . Обозначим взнос каждой фирмы x_i .

По условию ставка налога равна квадратному корню из суммы взносов: $t = \sqrt{\sum_{i=1}^K x_i}$.

Тогда фирмы одновременно и независимо решают задачи, считая выбор других лоббирующих

фирм, заданным: $\Pi_i = \frac{\left(a - c + \sqrt{\sum_{j=1}^K x_j}\right)^2}{(N + 2)^2 b} - x_i \rightarrow \max_{x_i \geq 0}$.

Условие первого порядка этой задачи, с учетом того, что решение может быть граничным:

$$\Pi'_i = \frac{2 \left(a - c + \sqrt{\sum_{j=1}^K x_j}\right)}{(N + 2)^2 b} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{\sum_{j=1}^K x_j}} - 1 \leq 0, = 0, \text{ если } x_i > 0, \quad i = 1, K.$$

Возможна ли ситуация, когда все фирмы выберут нулевые расходы на лоббирование? Для ответа на этот вопрос проанализируем, будет ли выбор нулевых расходов фирмой лучшим ответом на нулевые взносы остальных $(K - 1)$ фирм. Если фирма тоже решит выбрать нулевые расходы на

лоббирование, то её прибыль в игре составит $\pi_i = \frac{(a-c)^2}{(N+2)^2 b}$. Если же фирма выберет взнос,

равный ε , то прибыль фирмы в игре составит $\pi_i = \frac{(a-c+\sqrt{\varepsilon})^2}{(N+2)^2 b} - \varepsilon = \frac{(a-c)^2}{(N+2)^2 b} + \frac{2(a-c)\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon}{(N+2)^2 b} - \varepsilon$. Чтобы у фирмы был стимул выбрать

положительный взнос, равный ε , должно быть выполнено соотношение $\frac{2(a-c)+\sqrt{\varepsilon}}{(N+2)^2 b} - \sqrt{\varepsilon} > 0$.

Если $(N+2)^2 b \leq 1$, то указанное соотношение выполнено при любом положительном значении ε . Если $(N+2)^2 b > 1$, то фирма выиграет, выбрав в ответ на нулевые взносы остальных

потенциальных лоббистов значение ε , удовлетворяющее $\sqrt{\varepsilon} < \frac{2(a-c)}{(N+2)^2 b - 1}$. В любом случае,

нулевой взнос на лоббирование не будет лучшим ответом на нулевые взносы остальных потенциальных лоббистов. Поэтому, если существует равновесие, то в равновесии расходы на лоббирование по крайней мере одной из фирм положительны.

Если одна из фирм выбирает положительный взнос на лоббирование, условие первого порядка для такой фирмы должно быть выполнено как равенство, откуда найдём

$$t = \sqrt{\sum_{j=1}^K x_j} = \frac{a-c}{(N+2)^2 b - 1}.$$

Отметим два момента. Во-первых, поскольку все фирмы одинаковы, то выполнение одного условия первого порядка как равенства означает, что и остальные условия первого порядка будут выполнены как равенства. Тогда любое распределение взносов x_i , позволяющее получить указанную величину налога, является равновесным. Во-вторых, заметим, что равновесия в модели существуют только при следующем соотношении параметров: $(N+2)^2 b - 1 > 0$.

Поскольку от количества фирм, которые могут участвовать в лоббировании, величина налога не зависит, то рост числа таких фирм, K , никак не отразится на величине налоговых сборов.

Критерий

Задача фирмы при конкуренции по Курно – 1 балл, если дальнейшего продвижения нет.

Условие первого порядка задачи фирмы в модели Курно или функция реакции - 2 балла (если нет задачи, но сразу записано условие первого порядка или функция реакции, то добавляем тот 1 балл, которые ставились за задачу).

Совокупный выпуск, если индивидуальный выпуск фирм ищется через него 1 балл.

Выпуск каждой фирмы в модели Курно 2 балла (добавляется 1 балл «за совокупный выпуск», если выпуск каждой фирмы найден иначе)

Прибыль отечественной фирмы в модели Курно в зависимости от величины налога 3 балла.

Задача отечественной фирмы на этапе лоббирования 2 балла.

Найден равновесная сумма взносов на лоббирование/налог 3 балла.

Вывод о том, как величина налога изменяется с ростом количества лоббистов 1 балл.

Financial Economics

Olympiad 2023

Solutions

Problem 1

There are two dates: 0, 1.

At time 1, there are 2 states of the world, high (h) and low (l).

There are three assets in the market: a risk-free bond (asset 1) that pays one in every state of the world, and two risky assets (asset 2 and asset 3) that have the same payoff in each state of the world at time 1. Specifically, both assets pay d^h in state h (with probability p) and d^l in state l , with probability $1 - p$, where $0 < d^l < d^h$.

The investor has no pre-existing positions in the assets and no other endowment. To trade the risky assets, the investor needs to satisfy a margin requirement. The requirement is that the combined value of all long positions in risky assets plus the (possibly negative) value of the riskless bond position must be at least equal to half the total value of all long position in risky assets plus one and a half times the amount raised by short-selling risky assets.

The price of asset i is denoted p_i . The position of the investor in asset i is denoted x_i .

1. (2 points) Suppose that there is no margin requirement. What should be the relation between the prices of asset 2 and 3?

Because they have the same payoffs, their prices must be equal, i.e., $p_2 = p_3$.

2. (4 points) Suppose again that there is no margin requirement and that $p_1 > 0$, $p_2 = 1$, and $p_3 = 1 + e$, where $e > 0$. Suppose that $x_1 = 0$ and $x_2 = 1$. What is the range of positions in asset 3 such that there exists an arbitrage of type 1?

Hint: an arbitrage of type 1 exists when there exists a portfolio yielding nonnegative cash flow at time 1 with a strictly negative cost at time 0.

The cost at time 0 is $x_2 p_2 + x_3 p_3 = 1 + x_3(1 + e)$, so the condition is $x_3 < -\frac{1}{1+e}$.

At time 1, the cash-flow in state $k = l, h$ is $x_2 d^k + x_3 d^k = d^k(1 + x_3)$, so the condition is $x_3 \geq -1$.

Thus, the range of positions for a Type-1 arbitrage to exist is $x_3 \in \left[-1, -\frac{1}{1+e}\right)$.

3. (6 points) Let x_i^+ and x_i^- denote respectively the long and short position in asset i (thus, $x_i^- = x_i I_{x_i < 0}$ and $x_i^+ = x_i I_{x_i \geq 0}$, where I is the indicator function). Write the constraint on positions x_i induced by the margin requirement.

The constraint can be written as

$$\sum_{i=2}^3 x_i^+ p_i + x_1 p_1 \geq \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 x_i^+ p_i - \frac{3}{2} \sum_{i=2}^3 x_i^- p_i.$$

Then using the fact that $x_i^+ + x_i^- = x_i$, the constraint becomes:

$$\sum_{i=1}^3 x_i p_i \geq \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 (x_i^+ - x_i^-) p_i.$$

4. (8 points) Suppose now that the investor has a preexisting position $y_1 \geq 0$ in the risk-free asset. As before, $p_1 > 0$, $p_2 = 1$, and $p_3 = 1 + e$, where $e > 0$. Assume that the investor takes offsetting positions in assets 2 and asset 3 and that $x_2 = 1$. Derive a condition on y_1 such that there is an arbitrage of type 1 and such that the investor can exploit it (i.e., satisfy the margin requirement). Interpret this condition.

The investor sets $x_3 = -x_2 = -1$. Thus, using the previous condition, margins are satisfied for this arbitrage if $(x_1 + y_1)p_1 + p_2 - p_3 \geq 0.5(p_2 + p_3)$. Therefore, $(x_1 + y_1)p_1 \geq 1 + 1.5e$.

The cost of the portfolio at time 0 is $\sum_i x_i p_i$, and is strictly negative if $x_1 p_1 < e$. The payoff at time 1 is nonnegative if $x_1 + y_1 \geq 0$.

Under these three conditions, there exists an arbitrage of type 1. These conditions cannot be satisfied together if $y_1 = 0$. For $y_1 > 0$, the conditions are

$$x_1 + y_1 \geq \frac{1+1.5e}{p_1} > 0, \quad x_1 p_1 < e, \quad x_1 + y_1 \geq 0.$$

The last condition is satisfied when the first one is. Thus, there is a lower bound for the preexisting position $y_1 \geq \frac{1+1.5e}{p_1} - x_1$, with $x_1 < \frac{e}{p_1}$.

Intuitively, the investor needs to have enough risk-free asset as collateral to be able to exploit the arbitrage. Otherwise, he does not satisfy the margin constraint.

Problem 2

Imagine a firm that has a zero-coupon debt with face value (promised repayment) $F < 100$ to be repaid next period. The firm has available cash of 30 and some assets in place. The assets in place generate the cash flow of either 20 or 100 with *equal* probabilities next period.

The CEO of the firm can either pay the available cash to the shareholders as a dividend or invest it in the project. The latter option would add 50 to the firm's next period cash flow, with certainty. Regardless of the CEO's choice, after the firm generates the next period cash flow, it is liquidated with zero salvage value.

For all parts, assume that the CEO *acts in the interest of the firm's shareholders*. The shareholders have *limited liability* and there are *no costs of bankruptcy*. There is *no discounting* and *everybody is rational and risk-neutral*. The capital market is *perfectly competitive*, meaning that, for any offered security, investors are ready to pay the expected cash flow it generates.

Note: When distributing the total cash flow, debtholders have priority over shareholders, and senior debtholders have priority over junior debtholders. Shareholders' limited liability means that if the firm's total cash flow is below the sum of the promised repayments to creditors, the creditors seize the entire firm's cash flow, but the shareholders do not pay anything out of their own pockets.

1. (4 points) Assume that, in case of indifference, the CEO implements the project. Show that the CEO will implement the project if and only if $F \leq 60$.

The value for the shareholders is:

- from paying the dividend: $30 + \frac{1}{2}(100 - F) + \frac{1}{2}\max\{20 - F, 0\}$

- from investment: $\frac{1}{2}(150 - F) + \frac{1}{2}\max\{70 - F, 0\}$

The second option is (weakly) better iff $F \leq 60$.

2. (6 points) Suppose now the firm does not have available cash. Hence, if the CEO decides to implement the project, he needs to raise the necessary 30 in the capital market. Suppose he can do it only by issuing debt which is *junior* (i.e., having *lower* priority) to the existing one. Assume that, once the funds are raised, the CEO is *obliged* to invest them. Suppose $F = 70$. Will the CEO implement the project?

The direct solution is as follows:

If the project is implemented, the total cash flow is either 70 or 150. Hence, the existing creditors always get back 70, since they are senior. Hence, there remain 0 and 80 for potential repayments to new creditors in the low and high state respectively. Since the capital market is perfectly competitive, the face value of the new debt has to be such that the expected repayment equals the raised funds:

$$\frac{1}{2} \cdot F_{new} = 30 \implies F_{new} = 60.$$

Hence, after the repayment of all debts, there remain 0 and 20 in the low and high states. Thus, the shareholder's value $E = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$.

Instead, if the CEO does not do the project, the shareholders receive 0 in the low state and $100 - 70 = 30$ in the high state. That is, $E = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$.

Thus, the CEO will not implement the project.

There is also an alternative indirect solution:

The current total value of the firm is $\frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 100 = 60$ if the project is not implemented, and $60 + \text{project's NPV} = 60 + 20 = 80$ if the project is implemented.

The current debt value is $\frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 70 = 45$ and 70, respectively. Hence, the current equity value is $60 - 45 = 15$ and $80 - 70 = 10$, respectively. Thus, the CEO will not implement the project.

3. (5 points) Suppose all assumptions of question 2 hold, except that the CEO is now allowed to issue debt which is **senior** (i.e., having **higher** priority) to the existing one. Will the CEO implement the project?

If the new debt is senior, $F_{new} = 30$, as the new creditors always get their repayment in full.

Hence, if the project is implemented, the shareholders receive $150 - 30 - 70 = 50$ in the high state and 0 in the low state $\implies E = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25$.

$25 > 15$ from (b) \implies the CEO will do the project.

4. (5 points) Return to the initial setting (i.e., the firm has cash of 30 and does not need to raise funds in the market) and assume $F = 70$. Show that the debtholders can benefit by **unconditionally** reducing F today. An example is enough.

The creditors can benefit from the debt forgiveness only if it changes the CEO's behavior. Hence, it must be that the new face value $F' \leq 60$.

Take, for example, $F' = 60$. The CEO will do the project, and the creditors will always receive 60. In contrast, under $F = 70$, the CEO pays the dividend, and the creditors receive $\frac{1}{2} \cdot 70 + \frac{1}{2} \cdot 20 = 45 < 60$. Hence, reducing the face value to 60 benefits the creditors.

Problem 3

A company's share is trading at \$100. The stock price follows a binomial process. It can move up by the factor of 1.25 or down by the factor of 0.8. European call options with a strike price of \$90 expire in one year. Continuously compounded risk-free interest rate is 5%.

1. (5 points) What is the option price?

$$\begin{cases} c_u = \lambda uS - \mu e^{rf}, \\ c_d = \lambda dS - \mu e^{rf}; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 35 = 125 - \mu e^{0.05}, \\ 0 = 80 - \mu e^{0.05}. \end{cases}$$

Solving this system yields:

$$\lambda = \frac{c_u - c_d}{uS - dS} \approx 0.778 \quad \text{and} \quad \mu = e^{-rf}[\lambda uS - c_u] \approx 59.188.$$

Therefore, $c = \lambda S - \mu \approx 18.59$.

Using hedging probabilities as an alternative solution:

$$\pi = \frac{e^{rf} - d}{u - d} = \frac{e^{0.05} - 0.8}{1.25 - 0.8} \approx 0.55838;$$

$$c = \frac{c_u \pi + c_d(1 - \pi)}{e^{rf}} \approx \frac{35 \cdot 0.55838 + 0 \cdot (1 - 0.55838)}{e^{0.05}} \approx 18.59.$$

2. (5 points) How to arbitrate if you can get a quote from the market which is \$0.5 lower than calculated in question 1? Describe all transactions.

If the market price is equal to 18.09, then:

- Buy the call option (-18.09);
- Sell the replicative portfolio (+18.59):
 - Borrow 0.778 stocks from a broker;
 - Invest \$59.188 in the risk-free asset.