**Критерии оценивания заданий заключительного этапа по направлению «Прикладная математика»**

Задания по направлению состояли из двух частей: инвариантной (обязательной для всех участников) и вариативной (разделённой на треки). Для того, чтобы претендовать на статусы дипломанта I, II, III степени, участникам необходимо набрать наибольшее число за задания, учитываемые в рейтинге по конкретным трекам. Для того, чтобы стать медалистом, участникам необходимо успешно выполнить задания по любым двум трекам.

| Номер задания | Макси-мальный балл | Учёт в рейтинге по треку | | |
|---|---|---|---|---|
| | | «Математические методы анализа в экономике» | «Математические методы в социологии» | «Прикладная математика в инженерии и естественных науках» |
| 1 | 14 | ✓ | ✓ | ✓ |
| 2 | 14 | ✓ | ✓ | ✓ |
| 3 | 14 | ✓ | ✓ | ✓ |
| 4 | 7,25 | ✓ | | |
| 5 | 7,25 | ✓ | | |
| 6 | 7,25 | ✓ | | |
| 7 | 7,25 | ✓ | | |
| 8 | 7,25 | ✓ | | |
| 9 | 7,25 | ✓ | | |
| 10 | 7,25 | ✓ | | |
| 11 | 7,25 | ✓ | | |
| 12 | 29 | | ✓ | |
| 13 | 29 | | ✓ | |
| 14 | 10 | | | ✓ |
| 15 | 15 | | | ✓ |
| 16 | 10 | | | ✓ |
| 17 | 10 | | | ✓ |
| 18 | 13 | | | ✓ |

Решения и критерии оценивания заданий инвариантной части и каждого трека представлены на следующих страницах.

**Инвариантная часть**

**Задание 1**

Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значений параметра α. Решение записать в векторном виде.

$$\begin{cases}(1+\alpha)x_1 + x_2 + x_3 = \alpha^2 + 3\alpha \\ x_1 + (1+\alpha)x_2 + x_3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 \\ x_1 + x_2 + (1+\alpha)x_3 = \alpha^4 + 3\alpha^3\end{cases}$$

Решение методом Гаусса

$$\begin{pmatrix}(1+\alpha) & 1 & 1 & \alpha^2+3\alpha \\ 1 & (1+\alpha) & 1 & \alpha^3+3\alpha^2 \\ 1 & 1 & (1+\alpha) & \alpha^4+3\alpha^3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & (1+\alpha) & \alpha^4+3\alpha^3 \\ 0 & \alpha & -\alpha & (\alpha+3)(\alpha^2-\alpha^3) \\ 0 & -\alpha & -2\alpha-\alpha^2 & \alpha^2+3\alpha-(\alpha^4+3\alpha^3)(1+\alpha)\end{pmatrix}$$

Если

$$\alpha = 0$$

Решение 1:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix} = \beta_1\begin{pmatrix}-1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}-1 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$$

*Иначе*

$$\alpha \neq 0$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & (1+\alpha) & \alpha^4+3\alpha^3 \\ 0 & 1 & -1 & (\alpha+3)(\alpha-\alpha^2) \\ 0 & -1 & -2-\alpha & \alpha+3-(\alpha^3+3\alpha^2)(1+\alpha)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & (1+\alpha) & \alpha^4+3\alpha^3 \\ 0 & 1 & -1 & (\alpha+3)(\alpha-\alpha^2) \\ 0 & 0 & -3-\alpha & (\alpha+3)(1-\alpha^2-\alpha^3)+3\alpha-2\alpha^2-\alpha^3\end{pmatrix}$$

Если

$$\alpha = -3$$

Решение 2:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Иначе*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & (1+\alpha) & \alpha^4 + 3\alpha^3 \\ 0 & 1 & -1 & (\alpha+3)(\alpha-\alpha^2) \\ 0 & 0 & -3-\alpha & (\alpha+3)(1+\alpha-2\alpha^2-\alpha^3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & (1+\alpha) & \alpha^4 + 3\alpha^3 \\ 0 & 1 & -1 & 3\alpha-2\alpha^2-\alpha^3 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^3+2\alpha^2-\alpha-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\alpha^2+2\alpha+1 \\ 0 & 1 & 0 & 2\alpha-1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^3+2\alpha^2-\alpha-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha^2+2 \\ 0 & 1 & 0 & 2\alpha-1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha^3+2\alpha^2-\alpha-1 \end{pmatrix}$$

*Решение 3:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^2+2 \\ 2\alpha-1 \\ \alpha^3+2\alpha^2-\alpha-1 \end{pmatrix}$$

*Ответ:*

Если $\alpha = 0$ решение: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Если $\alpha = -3$ решение: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Если $\alpha^2 + 3\alpha \neq 0$ решение: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha^2+2 \\ 2\alpha-1 \\ \alpha^3+2\alpha^2-\alpha-1 \end{pmatrix}$

**Критерии оценивания:**

*Каждый частный случай ($\alpha = 0$ или $\alpha = -3$) максимально оценивается в 3балла*
*Общий случай ($\alpha^2 + 3\alpha \neq 0$) максимально оценивается в 8 балла*
*При наличии арифметических ошибок из максимального количества баллов (8 для общего случая, 3 для частных случаев) вычитается 1-2 балла.*
*Если случай не рассмотрен – 0 баллов*

При использовании иных методов решение оценивается индивидуально

**Задание 2**

Имеются независимые выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ равного объема $n$ из распределения Бернулли. Известно, что выборочные средние равны $\bar{x} = 0.5$ и $\bar{y} = 0.4$. По выборкам был построен 95%-ый асимптотический доверительный интервал для разницы долей $p_X - p_Y$, реализация которого приняла вид $(-0.0143, 0.2143)$.

1. Найдите объем выборки $n$. Ответ округлите до ближайшего натурального числа.
2. На 5%-ом уровне значимости проверьте гипотезу $H_0: p_X - p_Y = 0$ против двусторонней альтернативной гипотезы.

**Решение:**

1. Асимптотический доверительный интервал для разницы долей имеет следующий вид:

$$[\bar{X}_n - \bar{Y}_n - z_{1-\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n} + \frac{\bar{Y}_n(1-\bar{Y}_n)}{n}}, \bar{X}_n - \bar{Y}_n + z_{1-\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n} + \frac{\bar{Y}_n(1-\bar{Y}_n)}{n}}].$$

Тогда

$$\bar{X}_n - \bar{Y}_n - z_{1-\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n} + \frac{\bar{Y}_n(1-\bar{Y}_n)}{n}} = -0.0143$$

$$0.5 - 0.4 - 1.96\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{n} + \frac{0.4(1-0.4)}{n}} = -0.0143$$

$$0.1 - 1.96\sqrt{\frac{0.49}{n}} = -0.0143$$

$$0.1143 = 1.96\frac{0.7}{\sqrt{n}}$$

$$n = \left(\frac{1.96 * 0.7}{0.1143}\right)^2 \approx 144.$$

2. $H_0: p_X - p_Y = 0$
   $H_1: p_X - p_Y \neq 0$

Запишем тестовую статистику:

$$T(X,Y) = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_n}{\sqrt{\frac{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}{n} + \frac{\bar{Y}_n(1-\bar{Y}_n)}{n}}} \; \widetilde{asy} \; N(0,1).$$

Рассчитаем наблюдаемое значение статистики:

$$T(x,y) = \frac{0.5 - 0.4}{\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{144} + \frac{0.4(1-0.6)}{144}}} = \frac{0.1 * 12}{0.7} = 1.71$$

Критическая область имеет следующий вид: $(-\infty; 1.96) \cup (1.96; +\infty)$.
Так как наблюдаемое значение статистики не входит в критическую область, следовательно, на уровне значимости 5% гипотеза $H_0$ не отвергается.

**Ответ:** 1) $n = 144$;
2) гипотеза $H_0$ не отвергается на уровне значимости 5%.

**Критерии проверки:**
1 пункт задачи – 7 баллов (4 балла за верно записанный доверительный интервал; 3 балла за корректный расчет реализации доверительного интервала).
2 пункт задачи – 7 баллов (3 балла за верно определенную критическую область, 2 балла за корректно посчитанное наблюдаемое значение статистики; 2 балла за верный вывод).

**Задание 3**
Management of a large corporation seeks to evaluate the performance of two branch offices (A and B). The ability to meet deadlines is one of the comparative efficiency criteria. Branch offices A and B perform independently of each other. From 140 randomly selected projects of branch A, 112 met deadlines. From 150 randomly selected projects of branch B, 129 met deadlines. Can we assert that branch A violates deadlines more often than branch B? Take 95% confidence interval. An alternative hypothesis is directional.

**Решение**
Сформулируем гипотезы:
$H_0: p_1 = p_2$
$H_1: p_1 > p_2$

Рассчитаем выборочные доли выполненных с нарушением сроков проектов в филиалах А и Б:
$\hat{p}_1 = \frac{140-112}{140} = 0.2$ , $\hat{p}_2 = \frac{150-129}{150} = 0.14$

Найдем среднюю долю выполненных с нарушением сроков проектов в обоих филиалах $\overline{p}$ и среднюю долю выполненных в срок проектов в обоих филиалах $\overline{q}$:
$$\overline{p} = \frac{28 + 21}{140 + 150} = 0.169$$
$$\overline{q} = 1 - \overline{p} = 1 - 0.169 = 0.831$$

Для решения задачи используем z-тест для долей, для реализации которого выполнены условия: выборки независимые, формируются случайным образом и для обеих выборок $np \geq 5$, nq $\geq 5$.

Далее найдем значение статистики критерия:
$$z_{\text{набл}} = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\overline{pq}\,(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{(0.2 - 0.14) - 0}{\sqrt{0.169 * 0.831\,(\frac{1}{140} + \frac{1}{150})}} = \frac{0.06}{\sqrt{0.0019}} \approx 1.363$$

Определим критическую область:
$z_{\text{критич}} = 1.645$

Критическая область [1.645; + ∞)
$z_{\text{набл}} \notin [1.645; +\infty)$

Нет оснований отклонить нулевую гипотезу $H_0$ о равенстве долей.
При имеющихся данных на уровне доверительной вероятности 95% мы не можем утверждать, что доля проектов, выполненных с нарушением сроков, в филиале А выше, чем в филиале Б.
К аналогичному выводу можно прийти, осуществив проверку гипотезы о равенстве долей через p-value:
p-value = 0.0865
p-value > $\alpha$ = 0.05

**Критерии оценивания задания 3**

| | |
|---|---|
| Применен метод, подходящий для сравнения долей с учетом направленной альтернативной гипотезы: проведен z-тест для равенства долей в независимых выборках. Без ошибок – 14 баллов, с незначительными ошибками - 12-13 баллов. | 12-14 баллов |
| Реализовано сравнение долей с помощью методов, не учитывающих требование о направленной альтернативной гипотезе или не опирающихся на проверку статистических гипотез: через тест Хи-квадрат на однородность долей, через построение доверительного интервала для разницы долей или др. методами | 7-11 баллов |
| Сделан верный заход в решении с минимальными расчетами или с серьезными ошибками в расчетах | 4-6 баллов |
| Выбран подходящий метод для сравнения долей без проведения расчетов | 1-3 балла |
| Выбран метод, не подходящий для сравнения долей | 0 баллов |

## Вариативная часть

### Задание 4.

Let $M_{22}$ be a linear space of real matrices of size $2 \times 2$ (with the standard operations of addition and multiplication by a real number). Let $\mathcal{A} : M_{22} \to M_{22}$ be the linear operator defined by

$$\mathcal{A}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

where $X^T$ is the transposed matrix $X$. Find the matrix of the operator A in Jordan form.

**Ответ.**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

с точностью до перестановки клеток.

**Решение.** Найдем собственные значения оператора $\mathcal{A}$. Число $\lambda$ есть собственное значение оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда существует собственный вектор, соответствующий этому собственному значению $\lambda$, т.е., в данном случае, такая матрица $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in M_{22}$, что

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Это условие равносильно условию: система

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -2x_1 - (4+\lambda)x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + (4-\lambda)x_4 = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение, что, в свою очередь, эквивалентно условию:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 & -4 \\ -2 & -4-\lambda & 4 & 8 \\ -1 & 1 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 3\lambda^3 = 0.$$

Таким образом, имеем собственные значения $\lambda_1 = 0$ алгебраической кратности 3 и $\lambda_2 = 3$ алгебраической кратности 1. Значит, жорданова форма матрицы линейного оператора $\mathcal{A}$ имеет с точностью до перестановки клеток один из трех видов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы выяснить, какой именно, в данном случае достаточно найти геометрическую кратность собственного значения $\lambda_1 = 0$, которая равна числу жордановых клеток в жордановом блоке для этого значения (в первом случае их три, во втором две, в третьем одна). Для этого находим размерность пространства решений уравнения

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Она равна двум. Значит, ответ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

с точностью до перестановки клеток.

Альтернативно можно было бы сразу записать матрицу оператора $\mathcal{A}$ в каком-либо (например, каноническом) базисе и решить задачу на приведение этой матрицы к жордановой форме (по существу, производя те же самые действия).

**Критерии.**

1. Верно выбрана стратегия решения (нахождение собственных значений и их кратностей) – 2 балла.

2. Верно найдены собственные значения (неважно, так, как в решении выше, или с первоначальным выписыванием матрицы оператора $\mathcal{A}$ в каноническом базисе) – 3 балла.

3. Верно найдена геометрическая кратность собственного значения 0 – 1 балл.

4. Верно записана жорданова форма – 1, 25 балла.

(∗) Нерелевантный ответ (матрица не той размерности или не в жордановой форме и т.п.) может быть оценен не более чем на утешительные 0,5 балла.

## Задание 5.

Calculate the integral

$$\underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1}_{2023\,\text{times}} \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots 2023x_{2023}}{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, \ldots\, dx_{2023}$$

or prove that it diverges.

**Ответ.** 1012

**Решение.** Подынтегральная функция ограничена (ее значения на области интегрирования принадлежать интервалу $(0, 2023]$) и имеет единственную точку разрыва: $(0, 0, \ldots, 0)$. Поэтому интеграл существует (например, используем критерий Лебега интегрируемости по Риману).

Чтобы сделать решение более лаконичным, покажем, что для любого натурального числа $n$ и любых действительных чисел $a_1, a_2 \ldots, a_n$ выполнено равенство:

$$\int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots a_nx_n}{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, \ldots\, dx_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Действительно, используя циклическую перестановку переменных (якобиан этой замены по модулю, очевидно, равен единице), получаем цепочку равенств

$$\int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots a_nx_n}{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, \ldots\, dx_n =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{a_nx_1 + a_1x_2 + a_2x_3 + \ldots a_{n-1}x_n}{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, \ldots\, dx_n =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{a_{n-1}x_1 + a_nx_2 + a_1x_3 + \ldots a_{n-2}x_n}{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, \ldots\, dx_n =$$

$\ldots\ldots\ldots$

$$\int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{a_2x_1 + a_3x_2 + a_4x_3 + \ldots a_1x_n}{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, \ldots\, dx_n.$$

Таким образом,

$$n \cdot \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots a_nx_n}{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, \ldots\, dx_n =$$

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)}{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, \ldots\, dx_n =$$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 dx_1\, dx_2\, dx_3\, \ldots\, dx_n =$$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Теперь, применяя это равенство и формулу суммы арифметической прогрессии, получаем:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots 2023x_{2023}}{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, \ldots\, dx_{2023} =$$
$$\frac{1 + 2 + \ldots + 2023}{2023} = \frac{2023 \cdot 2024}{2 \cdot 2023} = 1012.$$

Альтернативно можно по той же схеме вначале показать, что

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \frac{x_i}{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, \ldots\, dx_n = \frac{1}{n},$$

а затем воспользоваться линейностью интеграла.

**Критерии.**

1. Корректно обосновано существование интеграла – 1 балл.
2. Верно выбрана стратегия решения (циклическая замена переменных в исходном или упрощенном интеграле) – 3 балла.
3. Верно осуществлены преобразования – 2 балла.
4. Получено правильное значение (с применением формулы суммы арифметической прогрессии) – 1, 25 балла.

Задание **6.**
$X_1, X_2, ..., X_n$ — независимые и одинаково распределённые случайные величины с функцией плотности распределения $f_X$ :

$$f_X = \begin{cases} 1/2022\theta, & X \in [\theta,\ 2023\,\theta] \\ 0, & X \notin [\theta,\ 2023\,\theta] \end{cases}$$

(a) Найдите оценку параметра $\theta$ методом максимального правдоподобия.
(b) Найдите математическое ожидание полученной оценки.

**Решение**
Пункт (a). Выпишем функцию правдоподобия:

$$L \ = \ \prod_{i=1}^{n} f_X(X_i) \ = \ \frac{1}{(2022\,\theta)^n}.$$

$L$ является монотонно убывающей функцией, в силу чего определить её максимум путём выписывания условий первого и второго порядка не удастся. Однако, очевидно, что максимальное значение функции правдоподобия достигается при минимально возможном значении $\theta$. Из ограничения $\frac{X}{2023} \leq \theta \leq X$ для всех значений $i$ получаем искомую оценку параметра:

$$\hat{\theta} \ = \ \frac{\max X_i}{2023}.$$

Пункт(b). Для начала найдём функцию распределения полученной оценки $F_{\hat{\theta}}(x)$:

$$F_{\hat{\theta}}(x) \ = \ \ P(\hat{\theta} \leq x) \ = \ P(\max X_i \leq 2023\,x) \ = \ \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq 2023\,x) \ = \ F_X(2023\,x)^n \ .$$

Случайные величины $X_i$ по условию имеют равномерное распределение на отрезке $[\theta,\ 2023\,\theta]$, следовательно:

$$F_X(2023\,x)^n \ = \ \left(\frac{2023 - \theta}{2022\,\theta}\right)^n \ = \ (2022\,\theta)^{-n}(2023 - \theta)^n \ ,$$
$$f_{\hat{\theta}}(x) \ = \ F_{\hat{\theta}}(x)' \ = \ 2023\,n\,(2022\,\theta)^{-n}(2023\,x - \theta)^{n-1} \ .$$

Вычисляем математическое ожидание:

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}) \ = \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_{\hat{\theta}}(x)dx \ = \ 2023\,n\,(2022\,\theta)^{-n} \int\limits_{\frac{\theta}{2023}}^{\theta} x\,(2023\,x - \theta)^{n-1}dx$$

Можно использовать замену переменной $t = 2023x - \theta$:

$$2023\,n\,(2022\,\theta)^{-n} \int\limits_{0}^{2022\theta} t^{n-1}(t \ + \ \theta)dt \ = \ 2023\,n\,(2022\,\theta)^{-n} \left(\int\limits_{0}^{2022\theta} t^n dt \ + \ \theta \int\limits_{0}^{2022\theta} t^{n-1}dt\right) \ =$$
$$2023\,n\,(2022\,\theta)^{-n}\left(\frac{(2022\,\theta)^{n+1}}{n+1} \ + \ \theta\frac{(2022\,\theta)^n}{n}\right) \ = \ \frac{2023\,n\,2022\,\theta}{n+1} + \frac{2023\,\theta}{n} \ = \ \frac{2023\,\theta(2022\,n^2 \ + \ n \ + \ 1)}{n\,(n+1)}.$$

**Критерии оценивания**

1. Получена оценка в пункте (a) — 3,25 балла.

2. Получена функция плотности оценки в пункте (b) — 2 балла.

3. Вычислено математическое ожидание в пункте (b), приемлема любая форма раскрытия скобок после взятия интегралов — 2 балла.

**Задание 7**

Solve the differential equation

$$y''' - 8y = 24e^{2x} + 72cos\,^2x.$$

**Solution:**

$$y''' - 8y = 24e^{2x} + 36 + 36\cos 2x$$

$$y''' - 8y = 0$$
$$k^3 - 8 = 0$$
$$(k-2)(k^2 + 2k + 4) = 0$$
$$k = 2, k = -1 + \sqrt{3}i, = -1 - \sqrt{3}i$$
$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{2x} + e^{-x}\left(C_2 \sin\sqrt{3}x + C_3 \cos\sqrt{3}x\right)$$

$$y''' - 8y = 24e^{2x}$$
$$y_{\text{чр1}} = Axe^{2x}$$
$$y'_{\text{чр1}} = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$$
$$y''_{\text{чр1}} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$$
$$y'''_{\text{чр1}} = 12Ae^{2x} + 8Axe^{2x}$$
$$e^{2x}(12A + 8Ax - 8Ax) = 24e^{2x}$$
$$A = 2$$
$$y_{\text{чр1}} = 2xe^{2x}$$

$$y''' - 8y = 36$$
$$y_{\text{чр2}} = A$$
$$-8A = 36$$
$$A = -4.5$$
$$y_{\text{чр2}} = -4.5$$

$$y''' - 8y = 36\cos 2x$$
$$y_{\text{чр3}} = A\cos 2x + B\sin 2x$$
$$y'_{\text{чр3}} = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$
$$y''_{\text{чр3}} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$
$$y'''_{\text{чр3}} = 8A\sin 2x - 8B\cos 2x$$
$$8A\sin 2x - 8B\cos 2x - 8A\cos 2x - 8B\sin 2x = 36\cos 2x$$
$$\begin{cases} -8B - 8A = 36 \\ 8A - 8B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -9/4 \\ B = -9/4 \end{cases}$$
$$y_{\text{чр3}} = -\frac{9}{4}\cos 2x - \frac{9}{4}\sin 2x$$

**Ответ:**

$$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}\left(C_2 \sin\sqrt{3}x + C_3 \cos\sqrt{3}x\right) + 2xe^{2x} - 4.5 - \frac{9}{4}\cos 2x - \frac{9}{4}\sin 2x.$$

**Критерии проверки:**
Верно найденное решение однородного уравнения оценивалось 2.75 баллами. При этом каждый верно найденный корень характеристического уравнения оценивался 0.75 баллами, а правильно записанное решение однородного уравнения оценивалось 0.5 баллами.
Каждое верно найденное частное решение дифференциального уравнения оценивалось 1.5 баллами. Всего за поиск частных решений можно было получить 4.5 балла.

Задание 8.
Вычислите следующий предел или докажите, что он не существует:
$$\lim_{x\to 2023-0} (2023-x)^{\sin\pi(2024-x)}$$

**Ответ: 1.**

**Решение**

*Вариант 1*

1. Преобразуем исходный предел:
$$\exp\left\{\lim_{x\to 2023-0} \frac{\ln(2023-x)}{\sin\pi(2024-x)^{-1}}\right\}.$$
2. Раскрываем неопределённость по правилу Лопиталя:
$$\lim_{x\to 2023-0} \frac{\ln(2023-x)}{\sin\pi(2024-x)^{-1}} = \frac{1}{\pi}\lim_{x\to 2023-0} \frac{\sin^2(2024-x)}{(2023-x)\cos\pi(2024-x)}.$$
3. Применяем правило Лопиталя ещё раз:
$$\lim_{x\to 2023-0} \frac{2\sin\pi(2024-x)\cos\pi(2024-x)}{1} = 0$$
4. Вычисляем преобразованный предел из пункта 1:
$$\exp\left\{\lim_{x\to 2023-0} \frac{\ln(2023-x)}{\sin\pi(2024-x)^{-1}}\right\} = e^0 = 1.$$

**Критерии оценивания**

1. Выполнено преобразование (пункт 1), но не применено правильного подхода к раскрытию неопределённости — 1,25 балла.

2. Получен верный результат при применении правила Лопиталя (пункты 2, 3) — 2,5 балла за каждый пункт.

3. Верное вычисление предела и конечный ответ (пункт 4) — 1 балл.

*Вариант 2*

1. Используем замену переменной $t = 2023 - x$:
$$\lim_{t\to 0+0} t^{\sin\pi(t+1)} = \exp\left\{\lim_{t\to 0+0} \ln(t)\sin\pi(t+1)\right\} = \exp\left\{-\lim_{t\to 0+0} \ln(t)\sin(\pi t)\right\}.$$
2. Используя эквивалентность $\pi t \sim \sin\pi t$ при $t\to 0$ имеем:
$$\lim_{t\to 0+0} \ln(t)\,\pi t = \pi\lim_{t\to 0+0}\frac{\ln t}{t^{-1}} = -\pi\lim_{t\to 0+0}\frac{t^2}{t} = -\pi\lim_{t\to 0+0} t = 0.$$
3. Получаем итоговый результат:
$$\exp\left\{-\lim_{t\to 0+0} \ln(t)\sin(\pi t)\right\} = e^0 = 1.$$

**Критерии оценивания**

1. Выполнено преобразование с заменой переменной (пункт 1) — 2,25 балла.
2. Выполнены преобразования (пункт 2) — 4 балла.
3. Верное вычисление предела и конечный ответ (пункт 3) — 1 балл.

**Задание 9. Statistics**

Let $X_1, \dots, X_{25}$ be a sample from normal distribution, $\mathbb{E}[X] = Var(X) = \theta$.

1. Built a 90% symmetric two-sided confidence interval for unknown parameter $\theta$.
2. Find its realization given that $\sum_{i=1}^{25} X_i = 400$ and $\sum_{i=1}^{25} X_i^2 = 5625$.

*If* $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, *then* $\mathbb{P}(\xi < 1.64) = 0.950$, $\mathbb{P}(\xi < 1.96) = 0.975$ *and* $\mathbb{P}(\xi < 2.58) = 0.995$.

**Solution.**

1. As $X_1, \dots, X_{25} \sim \mathcal{N}(\theta, \theta)$, then $\bar{X} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} X_i \sim \mathcal{N}\left(\theta, \frac{\theta}{25}\right)$ and $\frac{5(\bar{X}-\theta)}{\sqrt{\theta}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. By Slutskiy theorem, $\frac{5(\bar{X}-\theta)}{\sqrt{\bar{X}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Then

$$\mathbb{P}\left(-z_{0.95} \leq \frac{5(\bar{X}-\theta)}{\sqrt{\bar{X}}} \leq z_{0.95}\right) = 1 - \alpha, \text{ where } z_{0.95} : \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) \leq z_{0.95}\right) = 0.95.$$

   In other words, $\theta \in \left[\bar{X} - z_{0.95}\frac{\sqrt{\bar{X}}}{5}, \bar{X} + z_{0.95}\frac{\sqrt{\bar{X}}}{5}\right]$.

2. Given the information that $\sum_{i=1}^{25} X_i = 400$, we know $\bar{X} = 16$. Then

$$\theta \in \left[16 - 1.64\frac{\sqrt{16}}{5}, 16 + 1.64\frac{\sqrt{16}}{5}\right] = [14.69, 17.31].$$

**Задание 10. Optimization. Managing the client department**
There are three employees in the bank's client department: two specialists, let us call them $A_1$ *and* $A_2$, and an office manager who distributes clients who come to the client department with various problems to two specialists. Work experience has shown that, firstly, customer problems can be combined into two classes - $B_1$ *and* $B_2$. Secondly, the effectiveness of solving problems by specialists can be characterized by a matrix:

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | *0,4* | *0,7* |
| $A_2$ | *0,6* | *0,3* |

Part 1. The manager's office is interested in several questions:

1. What are the limits of the efficiency of the entire department?
2. How to distribute clients among specialists in order to achieve the best efficiency?

Part 2. Employee $A_1$ has been trained in advanced training courses. After that, the efficiency matrix took the form

| | $B_1$ | $B_2$ |
|---|---|---|
| $A_1$ | *0.8* | *0.7* |
| $A_2$ | *0.6* | *0.3* |

The manager's office is interested in several questions:
3. How to optimally distribute clients among specialists in the new conditions in order to achieve the best efficiency?
4. What is the value of the efficiency of the department if clients are distributed among specialists optimally?

**Решение.**
Часть1. При заданных условиях задача управления клиентским отделом является антагонистической игрой 2x2. Анализ таблицы эффективностей говорит о том, что эффективность подразделения находится в интервале [0.4, 0.6]. У данной игры нет седловой точки и оптимальным подходом к распределению клиентов является их направление к случайно выбранному сотруднику с вероятностями $p_1, p_2 = 1 - p_1$. Найти вероятности можно из уравнений
$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = eff$
$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = eff$
$p_1 + p_2 = 1$, где $a_{ij}$ — эффективности решения сотрудником $A_i$ проблемы $B_j$, a eff — эффективность подразделения.
Решение имеет вид $p_1 = p_2 = 0.5, eff = 0.5$. Таким образом, следует выбирать специалистов для решения проблем клиентов с равными вероятностями.
Часть 2. После повышения квалификации сотрудника $A_1$ игра приобрела седловую точку. Оптимальной стратегией распределения клиентов является выбор сотрудника $A_1$. Таким образом, сотрудника $A_2$ можно перевести на другую работу. Эффективность подразделения повысится до 0.7
**Критерии.** Правильное и полное решение части 1 – 7 баллов, части 2 – 3 балла.

**Задание 11. Probability Theory.**

Let $\xi_1$ and $\xi_2$ be two independent and identically distributed exponential random variables with parameter $\lambda > 0$. Prove that random variables $\max(\xi_1, \xi_2)$ and $\xi_1 + 0.5\xi_2$ coincide by distribution.

**Solution.**

Two random variables coincide by distribution iff their distribution functions coincide. Let's find the distribution functions of random variable $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$ and $\zeta = \xi_1 + 0.5\xi_2$, namely, $F_\eta(x)$ and $F_\zeta(x)$ correspondingly.

First, let's find the distribution function of $\eta$:

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}(\eta \le x) = \mathbb{P}(\max(\xi_1, \xi_2) \le x) = \mathbb{P}(\xi_1 \le x, \xi_2 \le x) = \mathbb{P}(\xi_1 \le x)\mathbb{P}(\xi_2 \le x) = \\ = F_{\xi_1}(x)F_{\xi_2}(x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^2 = 1 + e^{-2\lambda x} - 2e^{-\lambda x}.$$

Now, let's find the distribution function of $\zeta$. Before we do it, let's notice that the random variable $0.5\xi_2$ has exponential with parameter $2\lambda$, as $F_{0.5\xi_2}(x) = \mathbb{P}(0.5\xi_2 \le \le x) = \mathbb{P}(\xi_2 \le 2x) = 1 - e^{2\lambda x}$. Then the distribution function of $\zeta$ can be found in the following way:

$$\begin{aligned} F_\zeta(x) &= \int_{\mathbb{R}} F_{0.5\xi_2}(x - t)dF_{\xi_1}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{\xi_1}(t)F_{0.5\xi_2}(x - t)dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{I}\{t \ge 0\}(1 - e^{-2\lambda(x-t)})\mathbb{I}\{x - t \ge 0\}dt = \\ &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-2\lambda(x-t)})dt = 1 + e^{-2\lambda x} - 2e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

**Задание 12**

Table 1 presents a part of a database obtained via consumer behavior questionnaire survey of the population of a big city. Respondents were asked to indicate up to four favorite food products, which they have consumed during last week (variables "food-1,2,3,4" in Table 1) as well as up to two favorite alcohol drinks (variables "drink-1,2" in Table 1) and entertainments (variables "ent-1,2" in Table 1).
Suggest classification procedure of 9 respondents in Table 1 into groups with homogeneous consumption behavior. Show initial calculation stages (full calculations till the end are not required).
Take a look at the data in Table 1 and suggest hypotheses about possible grouping of those 9 respondents. Suggest expectations about distinctive socio-demographic characteristics of those groups. Provide theoretical basis, which underlies those hypotheses.

Table 1

A part of the database of consumer behavior survey (N=1500)

| No | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| gender | female | female | male | male | male | male | female | female | male |
| age | 51 | 36 | 25 | 62 | 29 | 44 | 32 | 47 | 51 |
| income | 488 | 825 | 521 | 644 | 510 | 1000 | 673 | 412 | 492 |
| occupation | doctor | individual entrepreneur | marketing specialist | university professor | electrician | company director | designer | school teacher | plumber |
| food-1 | fresh vegetables | fresh meat | fresh meat | fresh meat | dumplings/ ravioli | caviar | cakes and biscuits | cakes and biscuits | sausages |
| food-2 | fresh fruits | squids | cheese | cheese | sausages | oysters | fish | fresh vegetables | dumplings/ ravioli |
| food-3 | fresh meat | cakes and biscuits | canned food | fresh vegetables | chocolate | fresh meat | oysters | yogurt | yogurt |
| food-4 | yogurt | chocolate | octopuses | chocolate | processed food | cheese | yogurt | fish | processed food |
| drink-1 | | wine | whiskey | cognac | beer | whiskey | wine | | vodka |
| drink-2 | | | | | | vodka | | | beer |
| ent-1 | theatre | cinema | night club | theatre | pop music concert | sport event | cinema | museum | sport event |
| ent-2 | | night club | cinema | philharmonic hall | night club | | | | |

**Критерии оценки:**
1. участник перекодировал переменные в дихотомические и объединил их в более общие категории – 6 баллов
2. участник обосновал меру близости и алгоритм классификации – 6 баллов
3. участник провел начальные этапы расчетов – 6 баллов
4. участник поставил вопрос о том, что продовольствие, алкоголь и досуг могут быть разными основаниями для классификации – 6 баллов
5. участник теоретически обосновал выдвинутые предположения (например, использовал теорию П.Бурдье) – 5 баллов

**Задание 13**

Demonstrate how social capital influences human capital using any relevant empirical example. Questionnaire survey is the available method of obtaining empirical data. Describe the desirable database which you plan to get (variables and their values). Suggest relevant hypothesis as well as statistical test applicable to the database.

**Критерии оценки:**
1. участник дал определения социальному и человеческому капиталам – 7 баллов
2. участник провел адекватную операционализацию понятий – 8 баллов
3. участник выдвинул обоснованную гипотезу – 7 баллов
4. участник выбрал и описал адекватный математико-статистический метод проверки гипотезы – 7 баллов

**Задание 14**
**Критерии оценивания:**
10 баллов: представлен корректный алгоритм сложности не более O(N*M) в среднем
7 баллов: представлен корректный алгоритм сложности не более O(N*M + N*log N) в среднем
5 баллов: представлен корректный алгоритм сложности O(N*M*log N) в среднем
1 балл: представлен корректный алгоритм сложности O(N*M*N) в среднем

**Решение:**
Алгоритм решения сложности O(N*M) в среднем.
Будем интерпретировать каждый байт файла как символ, таким образом содержимое файла можно рассматривать как текст\строку. Последовательно считываем каждый файл и формируем хеш таблицу, где ключ - содержимое файла, значение - название файла. Подсчет хеш-значения по содержимому файла требует сложности O(M) для одного файла, для всех файлов - O(N*M) соответственно. При попытке добавить значение в хеш таблицу можно сразу определять наличие записи с данным ключом (поиск по хеш таблице требует средней сложности O(1)). Если записи с таким ключом еще нет - создаем папку (именем папки может быть, например, значение хеша) перемещаем туда файл, если есть - перемещаем файл в уже существующую папку.
Для реализации алгоритма в зависимости от используемого языка программирования в качестве структуры данных могут быть использованы: std::unordered_map, std::unordered_multimap (C++), dict (Python), HashMap (Java).

**Задание 15**
**Критерии оценивания:**
15 баллов: 2 верных ответа. Полные обоснованные решения.
14 баллов: 2 верных ответа, полные решения с небольшими недочетами (неполные обоснования).
11-13 баллов: п.1: верные идеи, которые должны были привести к верному ответу, но в вычислениях ошибки, п.2: верное решение, верный ответ.
6-10 баллов: п.1: отдельные верные соображения, существенные ошибки в решении, ответ неверен, п.2: верное решение, верный ответ.
5 баллов: п.2: верное решение, верный ответ. П.1: решение неверное, нет верных идей, которые привели бы к верному решению, верного ответа нет.
3-4 балла: п.1: решение неверное, нет верных идей, которые привели бы к верному решению, верного ответа нет. П.2: решение неверно, ответ выписан верно.
1-2 балла: п.1: решение неверное, нет верных идей, которые привели бы к верному решению, верного ответа нет. П.2: решение неверно, есть некоторые верные соображения, ответ неверен.
0 баллов: нет ни одного верного ответа, решений нет, нет верных идей.

Число особых частиц в закрытом контейнере эволюционирует следующим образом. В начальный момент $t = 0$ в контейнере находится 1 частица. Она делится на 2 частицы того же типа через случайное время $Y$, распределенное по показательному (экспоненциальному) закону со средним 1 час. Случайную величину $Y$ будем называть временем жизни частицы.

Новые две частицы ведут себя также, как исходная первая частица. А именно, каждая частица делится на 2 через случайное время, которое распределено по тому же закону, что и $Y$. Новые частицы эволюционируют таким же образом, как и их предки. Предполагается, что времена жизни всех частиц независимы.

Вычислить

1. вероятность того, что через 1 час в контейнере будет не более 2 частиц;

2. вероятность того, что через 1 час в контейнере будет ровно 1 частица.

Решение:

**п. 2** Обозначим через $A_1$ событие {в контейнере через 1 час ровно 1 частица}. Тогда ответ в п.2:

$$P(A_1) = P(Y \geq 1) = e^{-1}$$

**п. 1** Обозначим через $A_2$ событие {в контейнере через 1 час не более 2 частиц}.

Через 1 час в контейнере будет не более двух частиц $\Leftrightarrow$ либо за 1 час исходная частица не успеет разделиться, либо первая частица разделится, а ни одна из частиц - потомков не успеет разделиться к моменту времени 1час .

Обозначим $Y_1$ и $Y_2$ - времена жизни потомков исходной частицы. По условию $Y_1$ и $Y_2$ независимы и одинаково распределены (по показательному закону с параметром 1). Обозначим $X = \min\{Y_1, Y_2\}$. Тогда 3 частицы в контейнере появятся в момент времени $Y + X$. Отметим, что с.в. $X$ распределена по показательному закону с параметром 2 (как минимум их двух независимых показательных (с параметром 1) случайных величин).

Тогда имеем

$$P(A_2) = P(Y \geq 1) + P(Y < 1, Y + X \geq 1) =$$
$$= P(Y \geq 1, Y + X \geq 1) + P(Y < 1, Y + X \geq 1) = P(Y + X \geq 1)$$

Применим формулу вероятности попадания в область (используем независимость $Y$ и $X$):

$$P(Y + X \geq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-y} e^{-y}(2e^{-2x})dxdy = 2e^{-1} - e^{-2}$$

Ответ в п.1: $P(A_2) = 2e^{-1} - e^{-2}$

**Задание 16**

Некоторый консервативный физический процесс описывается дифференциальным уравнением $x''(t)+a(3x^2-1)=0$, где $a\in R$ - некоторый параметр, $t$ - время, $x(t)$ - координата. Известно, что при некоторых значениях параметра $a$ и некоторых начальных данных (начальной координаты $x(0)$ и начальной скорости $x'(0)$) у данного уравнения есть периодические решения.
Найдите все возможные значения параметра $a$, при которых данная задача имеет периодические решения, полная энергия которых равна 1.

**Решение**

$x'' + a(3x^2 - 1) = 0$ (1)

$$\int (x'' + a(3x^2 - 1))x'(t)\,dt:$$

$$\int x'x''\,dt + a\int 3x^2x'dt - a\int x'dt = 0$$

$$x''dt = dx'$$
$$x'dt = dx$$

Тогда

$\frac{(x')^2}{2} + 3a\frac{x^3}{3} - ax = E$- закон сохранения

Потенциал: $3a\frac{x^3}{3} - ax = U(x)$

$$U(x) = a(x^3 - x) = a(x)(x-1)(x+1)$$

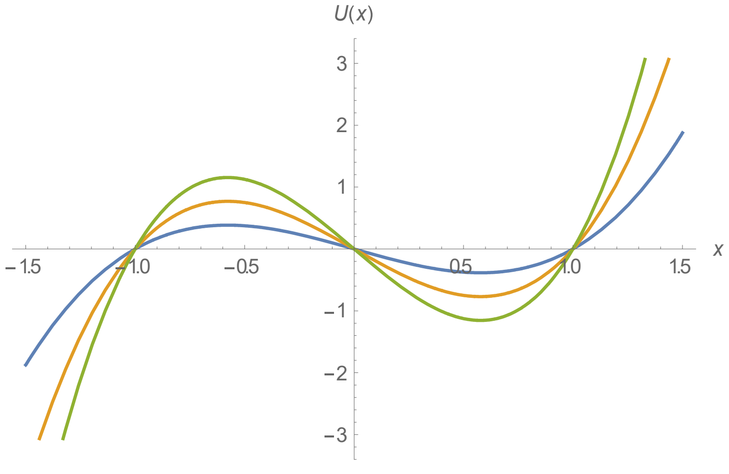


Рис. 1. Периодические траектории.

$\exists$ периодические решения с $E=1$ $\Leftrightarrow \exists$ потенциальной ямы, что обусловлено наличием локального максимума или минимума $U(x) \geq 1$

$$U'(x) = a(3x^2 - 1) = 0$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Локальный максимум достигается в $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ Рис 1.

$$U\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = a\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2a}{3\sqrt{3}}$$

$$U\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \geq 1 \iff \frac{2a}{3\sqrt{3}} \geq 1 \iff a \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Ответ $a \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

**Критерии:**
Задача решена верно (8-10 баллов)
Ход решения верен, однако решение не получено (5-7 баллов)
Найдено лишь решение однородного уравнения (1-4 балл)

**Задание 17**

**Критерии оценивания**
10 баллов: правильный ответ с обоснованием,
6 баллов: получена правильная матрица интенсивностей переходов (либо граф интенсивностей переходов),
2 балла: представлен верный случайный процесс, описывающий данную систему массового обслуживания

Пусть имеется одноканальная система массового обслуживания M|M|1|0 с приоритетами: входной поток требований пуассоновский с параметром $\lambda$, время обслуживания любого требования прибором распределено по экспоненциальному закону с параметром $\mu$. Пришедшее требование назначается приоритетным с вероятностью $1/3$ и неприоритетным с вероятностью $2/3$. Если прибор занят неприоритетным требованием, то пришедшее приоритетное требование вытесняет неприоритетное и оно теряется.
Требуется описать систему массового обслуживания однородным марковским процессом (с тремя состояниями) и найти его стационарное распределение; в частности, найти вероятность того, что в удаленный момент времени система будет свободна. Ответ получить в общем виде в терминах $\lambda$ и $\mu$.

РЕШЕНИЕ

Процесс $\xi_t = 0$ , если в момент $t$ в системе нет требований; $\xi_t = 1$ , если в момент $t$ в системе обслуживается приоритетное требование; $\xi_t = 2$ , если в момент $t$ в системе обслуживается неприоритетное требование. По определению, интенсивности переходов для $\{\xi_t\}$ равны

$$a_{ij} = \lim_{h \to 0} \frac{P(\xi_{t+h} = j | \xi_t = i)}{h}, \; i \neq j.$$

В нашем случае матрица интенсивностей переходов $A$ (инфинитезимальная матрица) равна

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda/3 & 2\lambda/3 \\ \mu & -\mu & 0 \\ \mu & \lambda/3 & -(\mu + \lambda/3) \end{pmatrix}.$$

Система уравнений для нахождения стационарных вероятностей $p = (p_0, p_1, p_2)$ имеет вид: $pA = 0$ и уравнение нормировки $\sum_{i=0}^{2} p_i = 1$. Таким образом, система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &= -p_0\lambda + p_1\mu + p_2\mu \\ 0 &= p_0\lambda/3 - p_1\mu + p_2\lambda/3 \\ 0 &= p_0 2\lambda/3 - p_2(\mu + \lambda/3) \\ p_0 &+ p_1 + p_2 = 1. \end{aligned}$$

Из третьего уравнения находим

$$p_2 = p_0 \frac{2\lambda/3}{\lambda/3 + \mu}. \tag{1}$$

Подставляя выражения для $p_2$ во второе уравнение, имеем

$$p_1 = p_0 \frac{1}{\mu}(\lambda/3 + \frac{\lambda^2/3}{\lambda/3 + \mu}). \tag{2}$$

Из последнего уравнения получаем

$$p_0 = [1 + \frac{1}{\mu}(\lambda/3 + \frac{\lambda^2/3}{\lambda/3 + \mu}) + \frac{2\lambda/3}{\lambda/3 + \mu}]^{-1}.$$

Тогда $p_2$ и $p_1$ легко вычисляются из уравнений (1) и (2) соответственно.
Вероятность того, что в удаленный момент времени система будет свободна равна $p_0$.

**Задание 18**

Функция $y = f(x)$ задана таблицей значений:

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 4 | -1 | 1 | 2 |

1. Найти наилучшее приближение функции $y = f(x)$ полиномом 2й степени
2. Построить для $y = f(x)$ интерполяционный полином 4й степени.

Задание 1

Решение методом наименьших квадратов:

Составим Функцию ошибки $\mathrm{H}\,(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=1}^{5}(\alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2 - y_i)^2$

Функция $\mathrm{H}\,(\alpha, \beta, \gamma)$ принимать минимальное значение если частные производные будут обращаться в 0 т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{H}\,(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathrm{H}\,(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \beta} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathrm{H}\,(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial \gamma} = 0 \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5} 2(\alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2 - y_i) * 1 = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{5} 2(\alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2 - y_i) * x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{5} 2(\alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2 - y_i) * x_i^2 = 0 \end{cases}$$

Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha \sum\limits_{i=1}^{5}(1 * 1) + \beta \sum\limits_{i=1}^{5}(x_i * 1) + \gamma \sum\limits_{i=1}^{5}(x_i^2 * 1) = \sum\limits_{i=1}^{5}(y_i * 1) \\ \alpha \sum\limits_{i=1}^{5}(1 * x_i) + \beta \sum\limits_{i=1}^{5}(x_i * x_i) + \gamma \sum\limits_{i=1}^{5}(x_i^2 * x_i) = \sum\limits_{i=1}^{5}(y_i * x_i) \\ \alpha \sum\limits_{i=1}^{5}(1 * x_i^2) + \beta \sum\limits_{i=1}^{5}(x_i * x_i^2) + \gamma \sum\limits_{i=1}^{5}(x_i^2 * x_i^2) = \sum\limits_{i=1}^{5}(y_i * x_i^2) \end{cases}$$

Подставляем значения из таблицы:

$$\begin{cases} 5\alpha + 2\beta + 18\gamma = 9 \\ 2\alpha + 18\beta + 26\gamma = -2 \\ 18\alpha + 26\beta + 114\gamma = 38 \end{cases}$$

Решение системы: $\begin{cases} \alpha = 7/11 \\ \beta = -17/22 \\ \gamma = 9/22 \end{cases}$

Полином 2й степени, приближающей функцию наилучшим образом: $P(x) = \frac{7}{11} - \frac{17}{22}x + \frac{9}{22}x^2$

Задание 2

Поиск интерполяционного полинома в форме Ньютона:

Таблица разделенных разностей примет вид:

| $x_i$ | $y_i$ | $f(x_0, x_1)$ | $f(x_0, x_1, x_2)$ | $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$ | $f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -2 | 3 | 1 | -3 | 1.25 | -0.35 |
| -1 | 4 | -5 | 2 | -0.5 | |
| 0 | -1 | 1 | 0 | | |
| 2 | 1 | 1 | | | |
| 3 | 2 | | | | |

Интерполяционной полином примет вид:

$$P(x) = 3 + (x+2) - 3 * (x+2)(x+1) + 1.25(x+2)(x+1)(x) - 0.35(x+2)(x+1)(x-2)x$$

$$P(x) = -1 - 4.1x + 2.15x^2 + 0.9x^3 - 0.35x^4$$

Ответ:

1.$P(x) = \frac{7}{11} - \frac{17}{22}x + \frac{9}{22}x^2$

2.$P(x) = -1 - 4.1x + 2.15x^2 + 0.9x^3 - 0.35x^4$

Задание 1

Выполнено с арифметической ошибкой

Составлена функция ошибки (2 балла)

Составлена функция ошибки, при составлении системы уравнений допущена арифметическая ошибка (3 балла)

Составлена функция ошибки, верно составлена система уравнений (4 балла)

Составлена функция ошибки, верно составлена система уравнений, Полином найден с арифметическими ошибками (5-6 баллов)

Составлена функция ошибки, составлена система уравнений, Полином найден верно (7 баллов)

При использовании иных методов решение оценивается индивидуально.

Задание 2

Предложен подход к решению задачи (2 балла)

Составлен полином в форме Лагранжа или Ньютона (4 балла)

Составлен и верно посчитан полином в форме Лагранжа или Ньютона (6 баллов)

При использовании иных методов решение оценивается индивидуально.