Критерии оценивания заданий заключительного этапа по направлению «Прикладная математика и информатика»

Задания по направлению состояли из двух частей: инвариантной (обязательной для всех участников) и вариативной (разделённой на треки). Для того, чтобы претендовать на статусы дипломанта I, II, III степени, участникам необходимо набрать наибольшее число за задания, учитываемые в рейтинге по конкретным трекам. Для того, чтобы стать медалистом, участникам необходимо успешно выполнить задания по двум трекам.

Номер задания	Максимальный балл	Учёт в рейтинге по треку «Анализ данных и искусственный интеллект»	Учёт в рейтинге по треку «Финансовые технологии»
1	10	✓	✓
2	10	✓	✓
3	10	✓	✓
4	10	✓	✓
5	10	✓	✓
6	10	✓	✓
7	10	✓	✓
8	10	✓	
9	10	✓	
10	10	✓	
11	10		✓
12	10		✓
13	10		✓

Решение заданий инвариантной части

Задание 1

Рассмотрим $y(-x)$:

$$y(-x) = \int_{x}^{-x} t^2 y(t)dt + 1 = -\int_{-x}^{x} t^2 y(t)dt + 1 = -y(x) + 2,$$

Дифференцируя уравнение, получаем:

$$y'(x) = x^2 y(x) - (-1)x^2 y(-x) = 2x^2.$$

Следовательно,

$$y(x) = \frac{2}{3}x^3 + C.$$

Подставляя данное решение в уравнение и делая проверку, получаем, что $C = 1$.

Ответ: $y = \frac{2}{3}x^3 + 1$.

Задание 2

Критерии оценивания:

10 баллов	Полностью обоснованное решение с правильным ответом
9 баллов	Верно найдены следы матричных степеней, но ответ неверный
8 баллов	Верно найдены степени матриц, но неверно найден один из следов
7 баллов	Верно найдены степени матриц, но неверно найдены два следа, или допущена ошибка при вычислении определителя
6 баллов	Верно найдены степени матриц, но неверно найдены все три следа
4-5 баллов	Найдена верно матрица A^2 и её след
1-3 балла	Различные попытки решения

Решение. Можно честно вычислить степени матрицы A

$$A^2 = \begin{pmatrix} -23 & -3 & 30 \\ -24 & -2 & 30 \\ -24 & -3 & 31 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -61 & -9 & 78 \\ -68 & -10 & 86 \\ -62 & -9 & 79 \end{pmatrix}.$$

Тогда $tr(A) = 2$, $tr(A^2) = 6$, $tr(A^3) = 8$ и мы в итоге получаем ответ -12. Однако, можно избежать необходимости возводить матрицу в степень, воспользовавшись тождеством

$$(tr(A))^3 - 3tr(A^2) \cdot tr(A) + 2tr(A^3) = 6\det(A) = -12.$$

ОТВЕТ: -12

Задание 3

Задача с небольшим подвохом: требуется вспомнить, что функция плотности равномерного распределения не имеет производной в крайних точках. Если мы выпишем произведения значений функций плотности для реализаций с.в., то мы получим, что параметр φ с одной стороны должен быть больше, чем любое из значений реализации $x_1, \dots, x_n$. С другой стороны, как можно более меньшим, так как $L = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\varphi}$ при $x_i \in [0, \varphi]$.

Таким образом, $\varphi_{ML} = \max(x_1, \dots, x_n)$.

Задание 4

Ответ: $n\ne 2,3$

Решение. При $n=1$ ответ зависит от системы определений и принимался любой из них. При $n=2$ контрпримером будет пустое отношение, при $n=3$ --- цикл длины 3.

Воспользуемся определением линейного порядка --- это антирефлексивное, антисимметричное, связное и транзитивное бинарное отношение.
Если $n>1$, то P должно быть антирефлексивно, иначе (если нет пары (a,a)), удалим альтернативу, отличную от a.
Если $n>2$, то P должно быть антисимметрично, иначе (если есть пары (a,a) и (b,b)), удалим альтернативу, отличную от a и b.
Если $n>2$, то P должно быть связно, иначе (если a и b не связаны), удалим альтернативу, отличную от a и b.
Если $n>3$ и P не транзитивно, то существуют такие a, b и c, что aPb, bPc, но $a\overline{P}c$. Если удалить альтернативу,
отличную от a, b, c (это возможно, т.к. $n>3$), отношение останется не транзитивным.

Вывод: при $n>3$ отношение P обязано быть линейным порядком.

Критерии общие:

- Решение содержит пробелы или ошибки, однако его можно признать верным или почти верным — 7 баллов.
- Недочеты слишком существенны, чтобы признать решение верным (но само рассуждение основано на здравых идеях) — 5 баллов.
- Задача не решена, но в тексте есть идеи, которые могут при должном развитии привести к решению — 2-3 балла.

Критерии частные (имеют приоритет над общими):

- Пропущен или неверен случай $n=2$: вычитается 2 балла.
- Полностью неверный (отличающийся от правильного не менее, чем тремя значениями n) ответ: 0 баллов.
- Правильное решение при явной формулировке задачи "существует альтернатива, при удалении которой...", а не "при удалении любой альтернативы": 3 балла.
- Только примеры для $n=2,3$: 3 балла.
- Только пример для $n=2$ или 3: 1 балл.
- Общие рассуждения, не использующие определение линейного порядка: 0 баллов.
- Проверена только связность отношения, но не транзитивность: 3 балла.
- В доказательстве подразумевается, что отношение связно (или $a>b$ или $b>a$), а это не так: не более 5 баллов.

Задание 5

Критерии оценивания:

10 баллов	Полностью обоснованное решение с правильным ответом
8-9 баллов	Верно найден определитель, но при преобразовании допущена арифметическая ошибка при вычислении одного или двух коэффициентов многочлена

6-7 баллов	Верно найден определитель, но ответ не преобразован до многочлена, либо более двух его коэффициентов найдены неверно
5 баллов	Допущены арифметические ошибки при вычислении определителя, при исправлении которых получится верный ответ
4 балла	Вычисление определителя остановилось на преобразовании сумм и произведений, аналогичных приведённым в авторском решении
1-3 балла	Различные попытки решения

Решение

Алгебра Сложная Обозначим определитель из условия задач через D_n и вычислим его. Сначала вычтем первую строку из всех остальных, а потом разделим i-ый столбец (для $i > 1$) на элемент данного столбца, лежащий на главной диагонали т.е. на $(i+2)^2 - 4$, получаем

$$D_n = \prod_{i=2}^{n} \left((i+2)^2 - 4\right) \begin{vmatrix} 10 & \frac{5}{4^2-4} & \frac{5}{5^2-4} & \dots & \frac{5}{(n+2)^2-4} \\ -5 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -5 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -5 & 0 & 0 & \dots & 1. \end{vmatrix}.$$

Теперь прибавим каждый столбец, начиная со второго, пять раз к первому. В результате мы получим верхнетреугольную матрицу и

$$D_n = \prod_{i=2}^{n} \left((i+2)^2 - 4\right) \left(10 + \sum_{j=2}^{n} \frac{25}{(j+2)^2 - 4}\right).$$

Далее

$$\prod_{i=2}^{n} \left((i+2)^2 - 4\right) = \prod_{i=2}^{n} i(i+4) = \frac{(n!)^2}{5!}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{25}{(j+2)^2 - 4} = \frac{25}{4} \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+4}\right) = \frac{25}{4}\left(\frac{77}{60} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right).$$

Следовательно,

$$D_n = \frac{(n!)^2}{4!}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\left(\frac{173}{48} - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4}\right)\right)$$

и

$$P(n) = (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\left(173 - 60\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4}\right)\right)$$

Раскрывая скобки, получаем

$$P(n) = 173n^4 + 1490n^3 + 4255n^2 + 4450n + 1152.$$

ОТВЕТ: $P(n) = 173n^4 + 1490n^3 + 4255n^2 + 4450n + 1152.$

Задание 6

Решение:

```
def maxStudents(seats) -> int:
    R, C = len(seats), len(seats[0])

    matching = [[-1] * C for _ in range(R)]

    def dfs(node, seen):
        r, c = node
        for nr, nc in [[r-1,c-1], [r,c-1],[r,c+1],[r-1,c+1],[r+1,c-
1],[r+1,c+1]]:
            if 0 <= nr < R and 0 <= nc < C and seen[nr][nc] == False and s
eats[nr][nc] == '.':
                seen[nr][nc] = True
                if matching[nr][nc] == -1 or dfs(matching[nr][nc], seen):
                    matching[nr][nc] = (r,c)
                    return True
        return False

    def Hungarian():
        res = 0
        for c in range(0,C,2):
            for r in range(R):
                if seats[r][c] == '.':
                    seen = [[False] * C for _ in range(R)]
                    if dfs((r,c), seen):
                        res += 1
        return res

    res = Hungarian()

    count = 0
    for r in range(R):
        for c in range(C):ц
            if seats[r][c] == '.':
                count += 1
    return count - res
```

Проверка решения:

```
[ ] seats = [["#",".",".",".","#"],
             [".","#",".","#","."],
             [".",".","#",".","."],
             [".","#",".","#","."],
             ["#",".",".",".","#"]]
```

```
[ ] maxStudents(seats)
```

```
10
```

```
[ ] seats = [["#",".","#",".","#"],
             [".",".","#",".","."],
             [".",".","#",".","."],
             [".",".","#",".","."],
             ["#",".","#",".","#"]]
```

```
[ ] maxStudents(seats)
```

```
10
```

```
[ ] seats = [[".",".","#",".","."],
             [".",".","#",".","."],
             [".",".","#","#","#"],
             [".",".","#",".","."],
             [".",".","#",".","."]]
```

```
[ ] maxStudents(seats)
```

```
9
```

Задание 7

1 Tiling with dominoes

We want to cover a subset of the square grid with dominoes such that each domino covers exactly two grid squares and no two dominoes overlap. Such a covering is called a *tiling*. The subset is assumed to be simply connected, that is, without hole. Fig. 1, left, depicts such a covering.

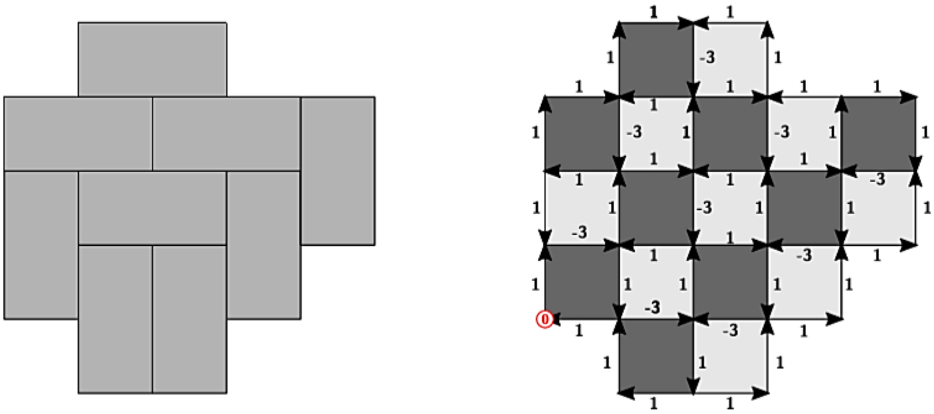

Figure 1: A domino tiling (left) and its encoding graph (right).

We encode any domino tiling by a weighted directed graph as follows. The squares of the grid are colored in black and white as a checkerboard. The edges of the squares are directed such that they turn clockwise around a black square and counterclockwise around a white one. An edge gets weight 1 if it is on the boundary of a domino and -3 otherwise. Fig. 1, right, illustrates this.

The *height* of a vertex is an integer defined as follows. First, the height of an arbitrary vertex is set to 0. Then, whenever a directed edge goes from A to B, the height of B is equal the height of A plus the weight of the edge.

Question 1. Consider the encoding graph in Fig. 1, right, where the height of an arbitary vertex of the boundary has been set to 0. What is the largest and lowest heights of the vertices of this graph?

A *flip* is the operation which replace two adjacent vertical dominoes by two adjacent horizontal dominoes, or conversely. For example, a flip can be performed on the two bottom most vertical dominoes of the tiling depicted in Fig. 1, left.

Question 2. How does a flip change the heights of the vertices of the encoding graph? Prove that one can always assume that any vertex of maximal height is on the boundary of the tiling.

Question 3. How does look the tiling around a vertex of maximal height which is on the boundary of the tiling? Deduce an algorithm to construct a tiling of a given subset of the square grid (if there is some). What is the complexity of your algorithm?

2 Solution

Question 1. Computing the height of all the vertices (Fig. 2, left) shows that the maximal height is 4 and the minimal one is -4.

Remark: The consistency of the definition of the height follows from the fact that any cycle has weight 0 (by induction on the number of squares inside the cycle): the height of a vertex is thus just the weight of any path from the arbitrary vertex of height 0 to itself.

Question 2. A flip increase or decrease by 4 the height of the vertex at the center of the 2×2 square covered by the two dominoes and does not change any other height (Fig. 2, right).

The incoming edges of a vertex of maximal height are weighted 1 and its outcoming edges are weighted -3. If it is not on the boundary of the tiling, this means it has two incoming edges weighted 1 and two outcoming edges weighted 1, that is, it its the center of a 2×2 square covered by two dominoes. We can thus perform a flip and decrease by 4 the height of this vertex. Since the height is bounded by below, only finitely many such decreasing flips can be performed. When no such flip is possible, the vertex of maximal height are on the boundary.

Remark: This proves that the set of possible tilings is connected by flips.

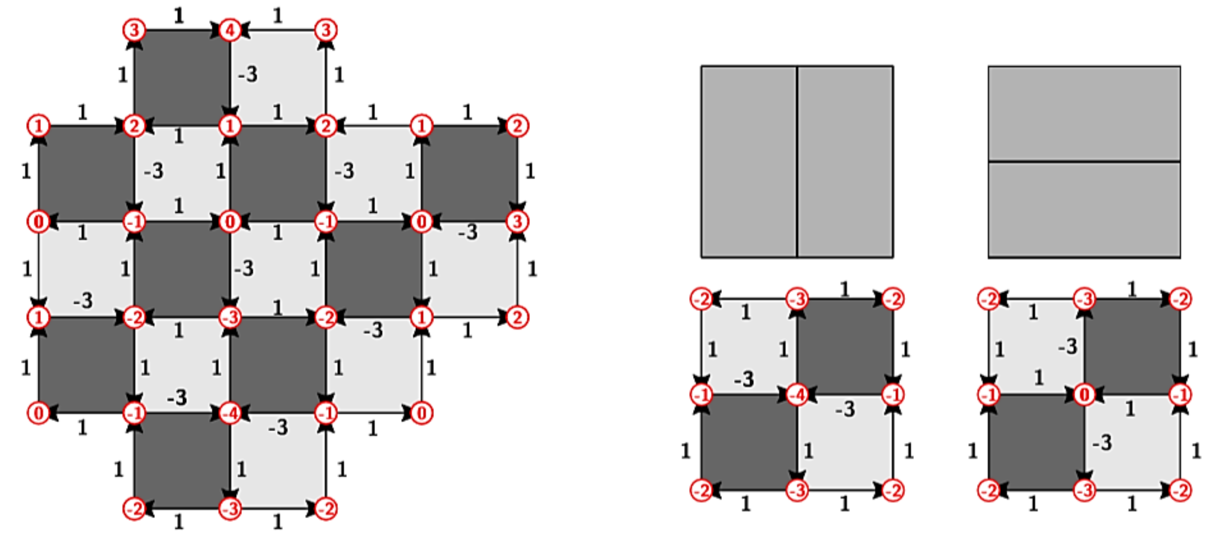

Figure 2: Heights of vertices (left) and action of a flip on heights (right).

Question 3. Consider a vertex of maximal height which is on the boundary. It cannot be on a corner, otherwiser it would have one outcoming edge of weight 1 which would points toward a higher vertex. It has thus two incoming edge of weight 1 and one outcoming edge of weight -3, that is, it is in the middle of the side of a domino (as the top most horizontal domino in Fig. 2, left).

Given a subset of the square grid, color the squares black and white, direct the edges clockwise around black square, and put weight 1 on all the boundary edges (which must obviously be on the boundary of a domino). Then, set to 0 the height of an arbitrary vertex on the boundary and compute the heights of all the vertices on the boundary. Consider the highest vertex on the boundary: one can assume that it is the highest in the whole tiling (Question 2), so we know that it is in the middle of the side of a domino. Put this domino. Continue with the remaining subset of the square grid while it is not empty. This eventually yields a tiling.

The height of the vertices on the initial boundary are computed in $O(n)$ where n is the number of squares. Then, at each step a domino is added and the heights can be updated in constant time (since only the heights around the domino have to be computed). Since there is $O(n)$ steps, this yields a $O(n)$ algorithm.

3 Fast exponentiation

The naive way to compute x^n is to compute $x \times x \times \ldots \times x$, which requires $n-1$ multiplications. The *Chandah-sutra* method proceeds differently:

- If $n = 1$ return x;
- If n is even, compute $y := x^{n/2}$ recursively and return $y \times y$;
- If $n > 1$ is odd, compute $y := x^{(n-1)/2}$ recursively and return $x \times y \times y$.

Question 1. Find the number of multiplications performed by the Chandaj-sutra method for $n = 15$, $n = 23$ and $n = 33$.

The *factor method* to compute x^n works as follows:

- If $n = 1$ return x;
- If $n > 1$ is prime, compute $y := x^{n-1}$ recursively and return $x \times y$;
- If n is not prime, compute $y := x^p$ recursively, where p is the smallest prime factor of n, then compute $y^{n/p}$ recursively as well and return it.

Question 2. Find the number of multiplications performed by the factor method for $n = 15$, $n = 23$ and $n = 33$.

Question 3. Can you outperform both methods for $n = 23$, that is, compute x^{23} with less multiplications than with any of these two methods?

4 Solution

Question 1. Respectively 6, 7, 6. More generally: $2\nu(1)+\nu(0)$, where $\nu(i)$ is the number of bits i in the binary expansion of n. In particular: between $\log_2 n$ and $2\log_2 n$ multiplications. This is especially efficient when n has many factor 2 in its decomposition in prime factors. See OEIS A014701.

Question 2. Respectively 5, 7, 7. It can thus be better or worse than the Chandraj-sutra method, depending on the value of n. See OEIS A117497.

Question 3. x^{23} can be computed with only 6 multiplications:

```
x2:=x*x
x3:=x2*x
x5:=x2*x3
x10:=x5*x5
x20:=x10*x10
x23:=x20*x3
```

Chandraj-sutra and factor methods can also be outperformed for

$$n = 43, 46, 47, 59, 77, 83, 86, 92, 94, 99 \dots$$

See OEIS A003313.

Вариативная часть

Решение заданий трека
«Анализ данных и искусственный интеллект»

Задание 8

Ответ: $n=6$.
Решение: пример --- граф-звезда. Дополнение к нему $K_5\cup K_1$ не планарно, так как не планарен K_5.
При $n<5$ не планарных графов на n вершинах не существует (т.к. K_4 планарен), поэтому дополнение к любому графу планарно.
При $n=5$ дополнение к графу --- граф на 5 вершинах, содержащий не все ребра. Он содержится в графе K_5 с одним удаленным ребром,
который планарен (проще всего нарисовать соответствующий плоский граф).
Обоснование с использованием теоремы Понтрягина---Куратовского сложнее, поэтому должно быть проведено очень аккуратно для полного балла.

Критерии общие:
- Решение содержит пробелы или ошибки, однако его можно признать верным или почти верным — 7 баллов.
- Недочеты слишком существенны, чтобы признать решение верным (но само рассуждение основано на здравых идеях) — 5 баллов.
- Задача не решена, но в тексте есть идеи, которые могут при должном развитии привести к решению — 2-3 балла.

Критерии частные (имеют приоритет над общими):
- При правильном ответе пример и доказательство, что при меньших n примера не существует, стоят по 5 баллов.
- Не доказывается, что при $n<5$ любое дополнение к связному графу можно представить, как подграф K_5 с одним удаленным ребром: вычитается 3 балла.
- Использование неверной формулировки теоремы Понтрягина---Куратовского (граф не планарен тогда, когда но не содержит подграфа,
- гомеоморфного K_5 или $K_{3,3}$, а не просто содержит подграф): 0 баллов за эту часть.
- Утверждается, что дополнение к графу-звезде это K_5 (на самом деле $K_5\cup K_1$): вычитается 1 балл.
- Попытка доказательства того, что $n>5$ перебором: 0 баллов за эту часть. Перебор не может быть полным, а тем более нельзя доказать за разумное время, что он полный.
- Предполагается, что первая половина решения легко следует из теоремы Понтрягина---Куратовского: вычитается 3 балла.
- Используется понятие «минимальный непланарный граф» без конкретизации, что это значит: 0 баллов за эту часть.
- Неверное понимание планарности (например, K_4 планарен) (0 баллов).

- Неаккуратное доказательство (например, не рассмотрен случай $n<5$): вычитается 3 балла.
- Неверный ответ или отсутствие численного ответа: 0 баллов.
- Отсутствует продвижение в решении: 0 баллов.
- Не доказано, что на 5 вершинах только 3 дерева: вычитается 3 балла.

Задание 9
Ответ: да.
Решение: пример такой формулы

$$\forall x, y((\neg\exists u, x = f(u,u)) / (\neg\exists v, y = f(v,v))) \to \exists w, f(x,y) = f(w,w)$$

В первом случае эта формула выражает верное утверждение «сумма двух нечётных чисел чётна». Во втором же подформула $\exists u, x = f(u,u)$ означает «x есть полный квадрат». Соответственно, наша формула значит «произведение двух чисел, не являющихся полными квадратами, должно быть полным квадратом», что неверно (например, x=3, y=5).

Критерий: полное решение = полный балл, правильный пример без аккуратного обоснования = половина, только ответ «да» = ноль баллов.

Задание 10

$$EL(\hat{y}, y) = EE[L(\hat{y}, y)|x]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{y} = C^-]\, L(C^-, C^+) p(y = C^+, x) P(x) + [\hat{y} = C^+] L(C^+, C^-) p(y = C^-, x) P(x) dx$$

$$= \int_0^{x^*} \frac{1}{2} L(C^-, C^+) p(y = C^+, x) dx + \int_{x^*}^{1} \frac{1}{2} L(C^+, C^-) p(y = C^-, x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{x^*} 40x dx + \frac{1}{2}\int_{x^*}^{1} 20(1-x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\,(20x^2]_0^{x^*} + 20x - 10x^2]_{x^*}^{1})$$

$$= \frac{1}{2}\,(20{x^*}^2 + 5 - 20x^* + 10{x^*}^2)$$

$$= 15{x^*}^2 - 10x^* + 5$$

Какова граница принятия решения (значение x^*), которая минимизирует риск?

$$L(C^+, C^-) p(y = C^-, x^*) = L(C^-, C^+) p(y = C^+, x^*)$$

$$20(1 - x^*) = 40x^*$$

$$x^* = \frac{1}{3}$$

Следовательно,

$$EL(\hat{y}, y) = \frac{10}{3}$$

Решение заданий трека
«Финансовые технологии»

Задание 11

ОДУ Через t секунд координаты Джерри будут $(0, 3t)$, а у Тома (x, y) (координата точки траектории Тома). Тангенс угла наклона прямой, соединяющей Тома и Джерри, равен $-(3t - y)/x$, следовательно

$$x\frac{dy}{dx} = y - 3t.$$

Дифференцируя по x, получаем

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = -3\frac{dt}{dx}.$$

Пусть к моменту времени t Том преодолел расстояние s, которое можно вычислить с одной стороны как $s = 6t$, а с другой стороны с помощью формулы длины кривой $s = \int_x^4 \left(1 + (y')^2\right)^{1/2} dx$, где $y' = dy/dx$. Таким образом

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{-1}{6}\left(1 + (y')^2\right)^{1/2}.$$

В итоге мы получаем следующие уравнение

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\left(1 + (y')^2\right)^{1/2}.$$

Обозначим y' через $p(x)$, имеем

$$x\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 + p^2\right)^{1/2}.$$

Несложно получить, что решения этого уравнения задаются в виде

$$\log(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{1}{2}\log x + C.$$

Чтобы найти константу C учтем, что $p = 0$ при $x = 4$. Таким образом

$$\log(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{1}{2}\log(x/4)$$

из чего сразу следует

$$p(x) = \frac{1}{2}\left((x/4)^{1/2} - (x/4)^{-1/2}\right)$$

Вспоминая, что $p = dy/dx$, получаем

$$y = \frac{x^{3/2}}{6} - 2x^{1/2} + C_1.$$

Чтобы найти константу C_1 учтем, что $y = 0$ при $x = 4$. Следовательно,

$$y = \frac{x^{3/2}}{6} - 2x^{1/2} + \frac{8}{3}.$$

Получаем, что Том достигнет Джерри в точке $(0, 8/3)$, то есть Том поймает Джерри, а Джерри пробежит $8/3$ метра.

ОТВЕТ: траектория $y = \frac{x^{3/2}}{6} - 2x^{1/2} + \frac{8}{3}$, Том поймает Джерри, Джерри пробежит $8/3$ метра.

Критерии оценивания:

10 баллов	Полностью обоснованное решение с правильным ответом
8-9 баллов	Верно найдена траектория, но неверно найдено расстояние, пройденное Джерри
6-7 баллов	Допущены ошибки при решении верно составленного дифференциального уравнения на y
4-5 баллов	Верно составлено дифференциальное уравнение на y
1-3 балла	Различные попытки решения

Задание 12

В модели парной регрессии, удовлетворяющей предпосылкам Гаусса-Маркова с нормально распределенными ошибками, выполняются следующие свойства:

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma), \forall i$$
$$Var(\varepsilon_i) = \sigma^2, \forall i$$
$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \forall i \neq j$$

Отсюда следует, что $E(\varepsilon_2) = 0, Cov(\varepsilon_2, \varepsilon_3) = 0, P(\varepsilon_2 > \varepsilon_1) = 0.5, Var(\varepsilon_5) = 9, E(\varepsilon_4^2) = 9$

Задание 13

Задача на понимание фиктивных переменных. Для фиктивной переменной часть аллоцируется на константу, а другая часть на коэффициент при x: $\hat{y} = 4 + 7{,}84x$.