Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются!											
Ш И Ф Р	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Задача 8	Задача 9	Задача 10	**Итого баллов**
	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 13	Max 13	Max 16	Max 16	**Max 100**

МАТЕМАТИКА

10 класс

Вариант 1

Время выполнения заданий – 180 минут
Максимальная оценка – 100 баллов

---

1. В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют.

2. Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства.

3. В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа.

Задача 1.

Рассмотрим операцию, которая по произвольным трём ненулевым числам x, y и z выдаёт результат $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$. Обозначим её как $G(x, y, z)$. Вычислите $G(2, 12, 9)$.

Ответ: ______________ (7 баллов)

Задача 2.

У Тамары 5 дочерей и ни одного сына. У некоторых из её дочерей также есть по 5 дочерей, а у остальных – ни одной. Всего у Тамары 20 дочерей и внучек и ни одной правнучки. У какого количества дочек и внучек Тамары нет дочерей?

Ответ: _______________ (7 баллов)

Задача 3.

Коля строит крепость в форме “вытянутой пирамиды” из одинаковых консервных банок со сгущёнкой. На нижнем уровне крепости выставлен прямоугольник размера 8 банок на 12 банок. Каждый следующий уровень также является прямоугольником, составленным из банок, в котором каждая банка стоит на своей банке предыдущего уровня, причём по сравнению с предыдущим уровнем остаётся свободная кайма шириной в одну банку. Сколько банок потребуется Коле для постройки всей крепости?

Ответ: ______________ (7 баллов)

Задача 4.

Найдите сумму цифр числа $111\,111\,111^2$.

Ответ: ______________ (7 баллов)

Задача 5.

Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ задана рекуррентным правилом $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ (которое выполняется для каждого натурального значения n). Известно, что $a_6 = 343$ и $a_3 = 19$. Вычислите a_5.

Ответ: ________________ (7 баллов)

Задача 6.

В клетчатой таблице 7×7 центральная клетка окрашена в чёрный цвет, а остальные клетки – белые. Сколько квадратов (всевозможных размеров), границы которых идут по линиям сетки в таблице, содержат окрашенную чёрную клетку?

Ответ: ______________ (7 баллов)

Задача 7.

Дана окружность с диаметром AB. Точка C делит этот диаметр в отношении $AC : BC = 1 : 2$. Пусть P и Q – такие точки на данной окружности, что $PC \perp AB$ и PQ также является диаметром. Вычислите отношение площади треугольника PCQ к площади треугольника ABP.

Ответ: ________________ (13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 8.

Муравьи-работники идут колонной с постоянной одинаковой скоростью по прямой. Расстояние между первым и последним муравьями в этой колонне составляет 15 метров. Муравей-охранник пробегает всю колонну, начиная с последнего муравья, и, когда достигает первого муравья, разворачивается и с той же скоростью возвращается обратно к последнему муравью в колонне. В тот момент, когда они встречаются, последний муравей находится ровно в 8 метрах от точки, где муравей-охранник начал свое путешествие. Определите, какое общее расстояние пробежал муравей-охранник.

Ответ: ____________ (13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 9.

Рассмотрим все девятизначные натуральные числа, в которых используются только цифры $1, 2$ и 3 (наименьшее из них – 111111111, наибольшее – 333333333). Каждое из этих чисел записали на отдельную карточку, таким образом, получилась колода из 19683 карт. Петя, Витя и Тима раздавали карты по следующему правилу: если две карты принадлежат одному мальчику, то по крайней мере в одной из девяти позиций у чисел на этих картах есть одинаковая цифра. Оказалось, что у Пети есть карта с числом 133221311, а у Вити – с числом 133211311. Определите, у кого из трех мальчиков карта с числом 123123123.

(16 баллов)

В этой задаче требуется привести **полное доказательство:**

Задача 10.

Найдите все натуральные числа n, у которых найдется такой натуральный делитель d, что $n^4 + d^3$ делится на $n^2 d + 1$. (16 баллов)

В этой задаче требуется привести **полное доказательство:**