

Международная олимпиада молодежи – 2023

Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются!

Ш И Ф Р	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Задача 8	Задача 9	Задача 10	Итого баллов
	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 13	Max 13	Max 16	Max 16	Max 100

МАТЕМАТИКА

10 класс

Вариант 3

Время выполнения заданий – 180 минут

Максимальная оценка – 100 баллов

1. В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют.

2. Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства.

3. В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа.

Задача 1.

Вы и девять друзей хотите собрать 18000 рублей пожертвований на благотворительность, разделив сбор поровну. Сколько рублей надо собрать каждому из вас?

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 2.

Две гандбольные команды – Волки и Пантеры, сыграли матч. В сумме две команды набрали 36 очков, при этом Волки победили с отрывом в 12 очков. Сколько очков набрали Пантеры?

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 3.

На инвестиционном счете у Коли лежит 1000 рублей. Каждый месяц с этой суммы ему начисляются 2% и перечисляются на его платёжную карту. При этом, с каждого перечисления на платёжную карту настроено автоматическое перечисление 1.45% на счёт-копилку. Сколько копеек перечисляется Коле на счёт-копилку ежемесячно с 1000 рублей на его инвестиционном счете?

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 4.

Пусть различные целые числа a, b, c, d , и e таковы, что $(7 - a)(7 - b)(7 - c)(7 - d)(7 - e) = 45$.
Чему равно $a + b + c + d + e$?

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 5.

Паша и Вика выбежали навстречу друг другу на круговом треке из диаметрально противоположных точек. Паша пробежал 120 метров до их первой встречи, затем Вика пробежала ещё ровно 200 метров от места первой встречи до места второй встречи. Найдите длину трека, если скорости бегунов постоянны.

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 6.

Дан правильный двенадцатиугольник $A_1A_2 \dots A_{11}A_{12}$. Определите, сколько существует различных правильных треугольников в плоскости этой фигуры, у которых не менее двух вершин являются вершинами данного двенадцатиугольника.

Ответ: _____

(7 баллов)

Задача 7.

В ромбе $PQRS$ точка X лежит на стороне PQ . Пусть Y и Z – основания перпендикуляров из X на диагонали PR и QS соответственно. Найдите минимальную возможную длину отрезка YZ , если $PR = 10$, а $QS = 24$.

Ответ: _____

(13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 8.

Изначально на доске в некотором порядке выписали в строку все натуральные числа от 1 до 2023 включительно без повторов. Каждую минуту строку с числами меняют по следующему правилу: на каждом шаге первое и второе число в строке (a и b) удаляют, а вместо них в начале строки записывают абсолютное значение их разности ($|a - b|$). Остальные числа на этом шаге не меняются. После выполнения 2022 шагов осталось только одно число. Найдите все возможные значения последнего числа (при различном изначальном порядке чисел).

Комментарий: Если изначально выписаны числа 3, 108, 11, 1021, 1, ..., то после первого шага выписан ряд чисел 105, 11, 1021, 1, ..., после второго шага 94, 1021, 1, ... и так далее.

Ответ: _____

(13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 9.

В мешке смешаны 200 шариков одинакового размера и цвета, из которых 100 шариков весят по 20 грамм каждый, а остальные 100 – по 21 грамму каждый. Для выполнения фокуса надо сформировать две группы разного веса, но содержащие одинаковое количество шариков (не обязательно 100). Определите наименьшее количество взвешиваний, необходимое, чтобы гарантированно сформировать две такие группы, если из инструментов имеются только одни чашечные весы (которые показывают, на какой из двух чаш весов груз тяжелее, либо показывают, что веса на чашах равны), и объясните, как это сделать.

(16 баллов)

В этой задаче требуется привести полное доказательство:

Задача 10.

Даны такие различные натуральные числа a, b и c , что $p = ab + bc + ca$ — простое. Докажите, что числа a^3, b^3 и c^3 дают различные остатки от деления на p .

(16 баллов)

В этой задаче требуется привести полное доказательство: