Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются!											
ШИФР	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Задача 8	Задача 9	Задача 10	**Итого баллов**
	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 13	Max 13	Max 16	Max 16	**Max 100**

МАТЕМАТИКА

11 класс

Вариант 2

Время выполнения заданий – 180 минут
Максимальная оценка – 100 баллов

---

1. В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют.

2. Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства.

3. В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа.

Задача 1.

Рассмотрим операцию, которая по произвольным двум неравным числам a и b выдаёт результат $\frac{a}{a-b}$. Обозначим её как $f(a,b)$. Вычислите $f(f(1,3),f(3,1))$.

Ответ: ______________ (7 баллов)

Задача 2.

Сколько будет $(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{2023}$?

Ответ: ______________ (7 баллов)

Задача 3.

Грани деревянного куба с ребром длиной n единиц покрашены в красный. Затем куб разрезают на n^3 единичных кубов. Оказалось, что ровно одна четверть общего количества граней единичных кубов покрашены в красный. Чему равно n?

Ответ: ______________ (7 баллов)

Задача 4.

Существуют два таких значения параметра a, что уравнение $4x^2 + ax + 8x + 9 = 0$ имеет только одно решение по x. Чему равна сумма этих двух значений a?

Ответ: ______________ (7 баллов)

Задача 5.

Пусть числа a, b, c, d и e – пять последовательных членов некоторой геометрической прогрессии. Пусть также известно, что $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = 1024$. Одно из чисел a, b, c, d и e по этим условиям может быть восстановлено однозначно. Чему равно это число?

Ответ: ________________ (7 баллов)

Задача 6.

Аня и Петя играют в такую игру: Аня кидает три игральные кости от 1 до 8 (все числа равновероятны на каждой кости) и считает сумму “выпавших” на игральных костях трёх значений. Петя вычисляет произведение этих трёх чисел. Аня выигрывает, если её число не меньше, чем число Пети. Найдите вероятность победы Ани. В качестве ответа укажите число $1024 \times \alpha$, где α – искомая вероятность.

Ответ: ______________ (7 баллов)

Задача 7.

В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность ω радиуса 2. В угол B также вписана окружность, которая также касается ω и радиус которой равен 1. Вычислите площадь треугольника ABC.

Ответ: _______________ (13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 8.

Компьютерная программа генерирует последовательность целых чисел следующим образом: первое число последовательности вводит Костя; после этого программа производит целочисленное деление последнего сохранённого числа на 18 с остатком. Сумма неполного частного и остатка сохраняется как очередное число. Например, если Костя ввёл число 5291, то компьютер вычисляет: $5291 = 293 \cdot 18 + 17$, и сохраняет $310 = 293 + 17$. Следующее сохранённое число будет 21, так как $310 = 17 \cdot 18 + 4$ и $17 + 4 = 21$; и так далее. Покажите, что при любом начальном числе, начиная с некоторого момента, сохранённое число начинает бесконечно повторяться. Найдите это повторяемое значение, если изначальное число Кости равно 2^{2023}.

Ответ: ______________ (13 баллов)

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 9.

В лотерее участвуют билеты, на каждом из которых игрок записывает трехзначный номер, в записи которого допускаются только цифры 1, 2, 3 и 4 (цифры могут повторяться). Ведущий называет трёхзначное число такого же вида. Выигрышным считается билет, номер которого совпадает как минимум в двух позициях с числом, названным ведущим. Игрок хочет купить и заполнить несколько билетов так, чтобы хотя бы один из них гарантированно выиграл. Определите, какое минимальное количество билетов достаточно купить игроку (и как их заполнить). *Уточнение:* если ведущий назвал число 423, то 123 будет номером выигрышного билета, а 243 – нет.

(16 баллов)

В этой задаче требуется привести **полное доказательство:**

Задача 10.

Найдите все простые числа p и q и все натуральные числа $n > 1$, для которых числа $p^n q + 1$ и $pq^n + 1$ являются точными квадратами.

(16 баллов)

В этой задаче требуется привести **полное доказательство:**