ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ «МАТЕМАТИКА»

для 11 класса

Время выполнения заданий – 180 минут
Максимальная оценка – 100 баллов

Примечание:

1. В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют.

2. Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства.

3. В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа.

Задача 1. *(7 баллов)*

Найдите значение выражения $x + y$, если $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 13 = 0$.

Ответ: 1

Задача 2. *(7 баллов)*

Числа a, b, c таковы, что $a : b : c = 2 : 3 : 15$. Число a уменьшили на 10%, b увеличили на 20%, а значение c – не изменили. На сколько процентов изменилось значение суммы этих трёх чисел?

Ответ: 2

Задача 3. *(7 баллов)*

Укажите количество целых чисел, заключённых между корнями уравнения

$$2x^2 + 3x - 17 = 2\left(11 - 4\sqrt{7}\right) + 3\left(\sqrt{7} - 2\right) - 17$$

Ответ: 3

Задача 4. *(7 баллов)*

Найдите наименьшее целое x, при котором определена функция

$$y = \sqrt{\frac{3 + x}{x - 1}} + \sqrt{x}$$

Ответ: 2

Задача 5. *(7 баллов)*

Площадь правильного треугольника составляет $16\sqrt{3}/3\ \text{см}^2$. Найдите его биссектрису (в см).

Ответ: 4

Задача 6. *(7 баллов)*

Найдите наибольшее натуральное a, при котором система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет меньше четырёх решений.

Ответ: 2

Задача 7. *(13 баллов)*

Найдите все такие положительные числа x, что:

$$\frac{1}{[x]} - \frac{1}{[2x]} = \frac{1}{6\{x\}}$$

<u>Комментарий</u>. Квадратными скобками [x] обозначена функция взятия целой части числа x (то есть максимального целого числа, не превосходящего x), а фигурными скобками {x} – дробная часть числа x, по определению равная {x} := x – [x].

Ответ: 4/3; 23/9; 31/8

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

<u>**Тезисное доказательство:**</u>

Задача 8. *(13 баллов)*

Угол B треугольника ABC равен 60°, а угол C этого треугольника равен 54°. На стороне BC отметили такую точку P, что периметр четырёхугольника $ACPM$ равен периметру треугольника PMB, где M – середина AB. Найдите величину угла MPB.

Ответ: 27°

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 9. *(16 баллов)*

В спортзале бегает 71 первоклассник. Старшеклассникам Коле и Сергею дали список этих школьников и попросили занести их в таблицу в порядке возрастания роста (известно, что они все различного роста). Коля и Сергей решили выполнить это задание так: Коля называет любых трёх первоклассников по списку, а Сергей их ловит, сравнивает по росту и сообщает Коле, кто из троих по росту средний (Коля сам не смотрит, а только слушает ответы Сергея). Какое максимальное количество школьников Коля сможет гарантированно поставить в списке на правильную позицию (по возрастанию) после 1225 вопросов?

В этой задаче требуется привести **полное решение:**

Ответ: за такое количество вопросов можно гарантированно определить позицию только одного (среднего по росту) школьника.

Задача 10. *(16 баллов)*

Натуральные числа *m и n таковы, что $3^m - 2^n$ делится на 47. Какой остаток может давать число $4m + n$ при делении на 23?*

В этой задаче требуется привести **<u>полное решение:</u>**

Ответ: 0