Реализация гамильтоновых циклов в кольцевых графах.

Цели:

- Изучить гамильтоновость кольцевых графов;
- Создать алгоритм, подтверждающий или опровергающий гамильтоновость в графе.
- Рассмотреть дороги Москвы при вложении в плоскость;
- Рассмотреть гамильтоновость случайных графов;

Задачи:

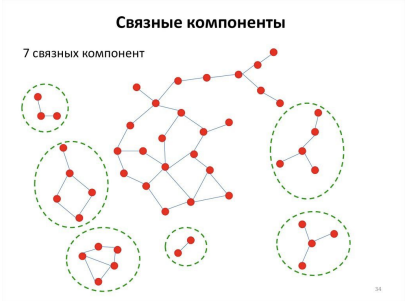
- Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие кольцевых графов;
- Сконструировать и реализовать на языке Python эффективные алгоритмы, проверяющие выполнение необходимого и достаточного условия гамильтоновости;

Основные понятия:

Граф G —это пара множеств $G=(V,E)$, где $V(G)$ — непустое конечное множество элементов, называемых **вершинами** графа, а E — множество пар элементов из V(необязательно различных), называемых ребрами графа. $E=(u,v):u,v\in V$ — множество **ребер** графа G, состоящее из пар вершин (u,v). Ребро (u,v) соединяет вершины u и v. **Смежные вершины** —это вершины, соединенные ребром. **Кратные ребра** —это ребра, которые соединяют одну и ту же пару вершин. Если две вершины соединены более чем одним ребром, говорят, что граф содержит кратные ребра.
(Граф G - это совокупность двух конечных множеств: множества точек, которые называются вершинами, и множества ребер. Число вершин графа не может быть равным нулю.)

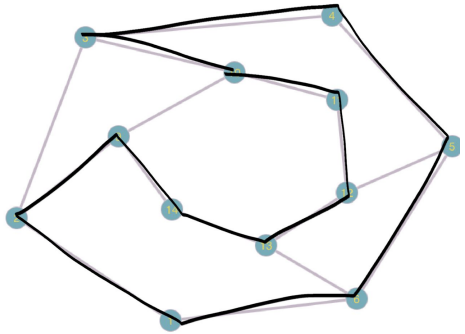
Гамильтонов граф — граф, содержащий гамильтонов цикл. При этом гамильтоновым циклом является такой цикл (замкнутый путь), который проходит через каждую вершину данного графа ровно по одному разу; то есть простой цикл, в который входят все вершины графа.

Компонента связности графа — некоторое множество вершин графа такое, что для любых двух вершин из этого множества существует путь из одной в другую, и не существует пути из вершины этого множества в вершину не из этого множества.

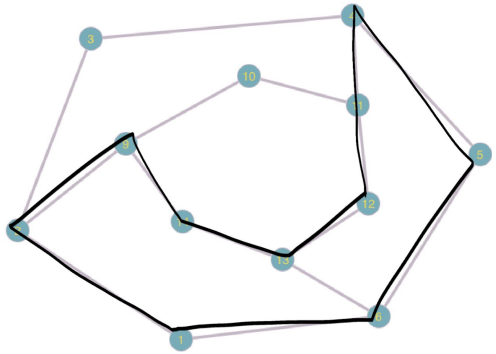


Москва:кольцевые графы(несколько циклов,соседние из них соединены рёбрами)

(1)



(2)



Сделаем предположение, что в графах с кольцами, где есть хотя бы две смежные вершины, имеется гамильтонов цикл. Проверим, изобразив произвольный граф: (1)

Действительно, гамильтонов цикл удалось найти.

Теперь соединим дороги несмежными вершинами: (2)

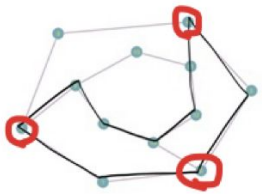
Как это получилось и с чем это связано?

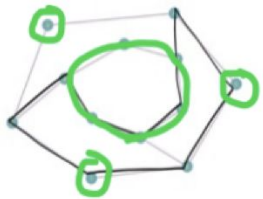
Вывод и доказательство необходимого условия:

Воспользуемся утверждением

Утверждение 1. *Пусть в графе G имеется гамильтонов цикл. Тогда количество $k := c(G-S)$ компонент связности $U_1, \ldots, U_k$, получающихся в результате удаления вершин некоторого непустого подмножества $S \subset V(G)$ графа G, не превосходит количества удаленных вершин:*

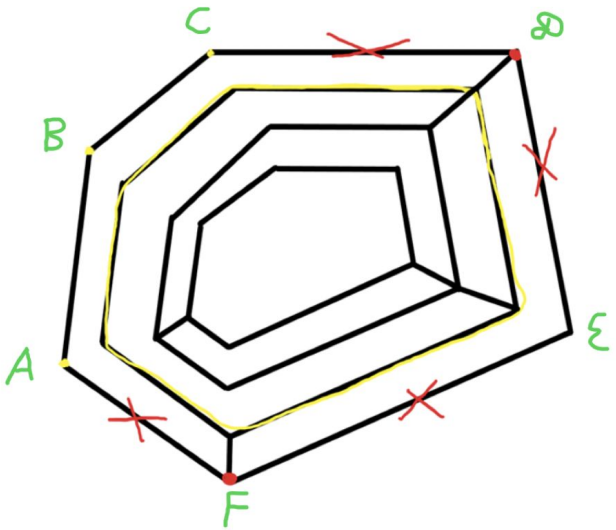
$$c(G-S) \leqslant |S|. \qquad (3.1)$$





Таким образом, получили, что количество компонент связности больше количества удалённых вершин, следовательно гамильтонов цикл отсутствует.

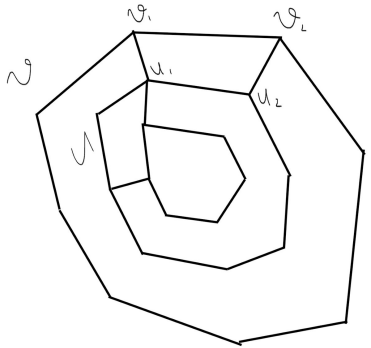
Теперь рассмотрим случай, когда хотя бы в одном из колец соединены несмежные вершины:



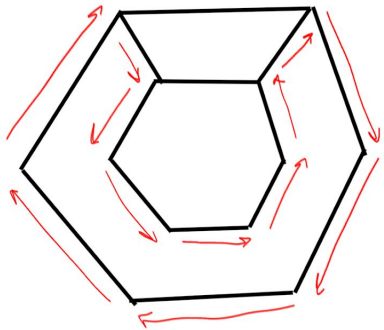
У нас две несмежные вершины внешнего кольца (4-го) соединены с третьим кольцом (D и F). Действуем по тому же самому принципу: удаляем эти две вершины и рёбра внешнего кольца, которые они соединяют. Таким образом у нас остаётся в качестве трёх компонентов связности 3 вершины во внешнем кольце (A, B и C) и в качестве одного компонента всё третье кольцо. Итого мы получили 4 компонента связности, а удалили всего 2 вершины, следовательно гамильтонов цикл данный граф содержать не будет.

Вывод и доказательство достаточного условия:

Предположим, что если для любой пары смежных колец V и U найдутся пары смежных вершин V1,V2, принадлежащих V, и U1,U2, принадлежащих U, такие что существуют ребра V1-U и V2-U2. Тогда гамильтонов цикл есть



Доказательство достаточного условия:



Докажем методом математической индукции:

1. База индукции, n=2

1. Индукционное предположение. Пусть n=k верно
2. Индукционный переход. n=k+1

k+1-внешнее кольцо

k-внутреннем кольцо

Сделать обход по k можем по индукционному предположению, а с k и k+1 верно по базе индукции.

Доказано.

Реализация на Python:
На входе задаём размеры графа, а на выходе получаем ответ, выполняются наши условия или нет

```python
class Ring:
    """
    Класс хранит число вершин в кольце и номера вершин связей вовне и номера вершин связи внутрь
    """
    count = 0
    rib_into = list()   # ребра внутрь
    rib_out = list()    # ребра наружу


class Rib:
    """
    ребро между кольцами
    """
    node_cur_ring: int
    node_next_ring: int

    def __init__(self, node_1=None, node_2=None):
        self.node_next_ring = node_2
        self.node_cur_ring = node_1
```

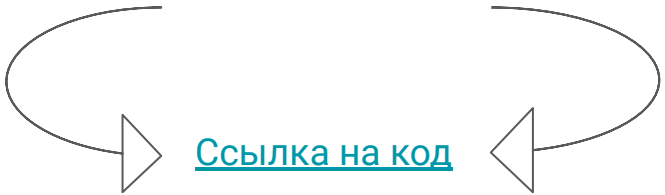
```python
"""
for i, ring in enumerate(rings[1:]):                # первое кольцо не проверяем, так как нет внутреннего к нему
    ring: Ring
    was_found = False
    near_nodes = get_nears_nodes(ring.rib_into, ring.count)     # получить список смежных вершин с ребрами внутрь

    for nodes in near_nodes:                                    # идем по списку соседних нод
        nodes: tuple
        list_next_1 = get_next_node(ring.rib_into, nodes[0])    # список смежных вершин внешнего внутреннего кольца
        list_next_2 = get_next_node(ring.rib_into, nodes[1])    # список смежных вершин внешнего внутреннего кольца
        count = rings[i].count                                  # количество узлов во внутреннем кольце
        # надо проверить если в списках соседние вершины
        for node_1 in list_next_1:
            for node_2 in list_next_2:
                if abs(node_1 - node_2) % count in [1, count - 1]:      # ищем соседние вершины
                    was_found = True    # нашли - проверка кольца завершена, переходим к следующему
                    break
            if was_found:
                break                   # нашли - проверка кольца завершена, переходим к следующему
        if was_found:
            break                       # нашли - проверка кольца завершена, переходим к следующему
    if not was_found:
        return False                    # ничего не нашли, значит нашли кольцо не удовлетворяющее условию
return True                             # все кольца прошли проверку
```

```python
    Задать граф через список ребер
    :return:
    """
    print("Кольца вводят следующим образом: \n"
          "- задается число колец\n"
          "- затем вводится число вершин в каждом кольце\n"
          "- указываются какие вершины с какими связаны вовне (вершины нумеруются сверху по часовой стрелке)")
    rings = input_rings()
    # rings = test()    # раскомментировать для тестирования и закомментировать верхнюю строчку

    if check_necessary(rings):
        print(f"Необходимое условие: да\n")
    else:
        print(f"Необходимое условие: нет\n")

    if check_sufficient(rings):
        print(f"Достаточное условие: да")
    else:
        print(f"Достаточное условие: нет")
```



Список используемой литературы:

1. Теория графов А.В. Омельчинко
2. Теория графов Д.В. Карпов
3. https://mk.cs.msu.ru/images/8/89/Dm-l4-selezn.pdf