Конкурс исследовательских и проектных работ школьников

«Высший пилотаж»

# Многочлен 4 степени и его корни

Исследовательская работа

Направление «Математика»

2023

# Содержание

# 1 Введение

С древних времен математики знали, как решать квадратное уравнение, уравнение 3-й степени математики научились решать только в XVI веке, открыв таким образом мнимые числа. Метод решения уравнений 4-й степени был найден достаточно быстро. Студент Кардано - Лодовико Феррари нашел решение уравнение 4-й степени путем решение вспомогательного уравнения 3-й степени.

Но в многочленах 4-й степени все еще есть, что изучать. Школа ограничена решением квадратных уравнений, говоря, что для кубических и тем более для уравнений 4-й степени формулы большие и их трудно запомнить. Но вся красота решения уравнений 4-й степени заключается в том, что математики научились преобразовывать уравнение так, чтобы было легче решать. Эта работа ставит за собой цель найти новый способ преобразования уравнений 4-й степени так, чтобы решение стало проще.

В 3-м разделе будет рассмотрен метод преобразования, в работе будет рассмотрен только один вид преобразования - движение многочлена. В четвертом разделе будут изучены свойства многочленов с симметричным графиком с использованием композиции многочленов. И, наконец, в разделе 5 будут рассмотрены многочлены с несимметричным графиком и способ поиска их корней. Но сначала мы рассмотрим современное решение уравнений 4-й степени.

# 2 Современный способ решения уравнений 4 степени

Сегодня есть несколько способов решить уравнение 4-й степени. В работе будут рассмотрены 2 метода решения уравнение 4-й степени - метод Декарта Эйлера и метод Феррари в качестве наиболее популярных методов. Также необходимо упомянуть, что в работе общий вид многочлена 4-й степени будет принят за $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, поскольку любой многочлен может быть представлен в этой форме после деления многочлена на его старший коэффициент.

## 2.1 Метод Декарта-Эйлера

Для решения уравнения используя метод Декарта-Эйлера нужно перевести из общего вида($x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$) в неполный вид($x^4 + ax^2 + bx + c$) это можно сделать с помощью замены. Далее будет рассматриваться только неполный вид.

Предположим что корнем уравнение является сумма 3-х цифр $x = y_1 + y_2 + y_3$ тогда можно произвести замену. $x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \iff$

$(y_1+y_2+y_3)^4+a(y_1+y_2+y_3)^2+b(y_1+y_2+y_3)+c=0 \iff$
$(y_1^2+y_2^2+y_3^2+2(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3))^2+a(y_1^2+y_2^2+y_3^2+2(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3))+b(y_1+y_2+y_3)+c=0 \iff$
$(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^2+4(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+4(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)^2+a(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+2a(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)+b(y_1+y_2+y_3)+c=0 \iff$
$(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^2+4(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+4(y_1^2y_2^2+y_1^2y_3^2+y_2^2y_3^2)+8y_1y_2y_3(y_1+y_2+y_3)+a(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+2a(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)+b(y_1+y_2+y_3)+c=0$

С группируем подобные $(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^2+(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)(4(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+2a)+4(y_1^2y_2^2+y_1^2y_3^2+y_2^2y_3^2)+(y_1+y_2+y_3)(8y_1y_2y_3+b)+a(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+c=0$. Далее введем условие: пусть $8y_1y_2y_3+b=0$ и $4(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+2a=0$ тогда уравнение превращается в систему уравнений

$$\begin{cases} 8y_1y_2y_3+b=0 \\ 4(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+2a=0 \\ (y_1^2+y_2^2+y_3^2)^2+4(y_1^2y_2^2+y_1^2y_3^2+y_2^2y_3^2)+a(y_1^2+y_2^2+y_3^2)+c=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y_1y_2y_3=\frac{-b}{8} \\ y_1^2+y_2^2+y_3^2=\frac{-a}{2} \\ (\frac{-a}{2})^2+4(y_1^2y_2^2+y_1^2y_3^2+y_2^2y_3^2)+a(\frac{-a}{2})+c=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y_1y_2y_3=\frac{-b}{8} \\ y_1^2y_2^2y_3^2=\frac{b^2}{64} \\ y_1^2+y_2^2+y_3^2=\frac{-a}{2} \\ y_1^2y_2^2+y_1^2y_3^2+y_2^2y_3^2=\frac{(a^2-4c)}{16} \end{cases}$$

По теореме Виета, для кубических уравнений $y_1^2, y_2^2, y_3^2$ являются корнями уравнения $y^3-\frac{ay^2}{2}+\frac{(a^2-4c)y}{16}+\frac{b^2}{64}=0$. Отсюда метод Декарта-Эйлера:

$x^4+ax^2+bx+c=0 \implies$

$$\implies \begin{cases} x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{y_1}\pm\sqrt{y_2}\pm\sqrt{y_3} \\ (\pm\sqrt{y_1})(\pm\sqrt{y_2})(\pm\sqrt{y_3})=-b/8 \end{cases}$$

Где $y_1, y_2, y_3$ корни уравнения $y^3-\frac{ay^2}{2}+\frac{(a^2-4c)y}{16}+\frac{b^2}{64}=0$.

## 2.2 Метод Феррари

Для метода Феррари так же нужно привести уравнение в неполный вид $x^4+ax^2+bx+c$. Далее нужно постараться собрать полный квадрат. $x^4+ax^2+bx+c=0 \iff$
$(x^2+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}+bx+c=0 \iff (x^2+\frac{a}{2})^2=\frac{a^2}{4}-bx-c \iff$
$(x^2+\frac{a}{2}+y)^2-2y(x^2+\frac{a}{2})-y^2=\frac{a^2}{4}-bx-c \iff (x^2+\frac{a}{2}+y)^2=\frac{a^2}{4}-bx-c+2y(x^2+\frac{a}{2})+y^2 \iff$

$(x^2 + \frac{a}{2} + y)^2 = 2yx^2 - bx + \frac{a^2}{4} - c + ay + y^2$.

Теперь нужно найти такой $y$ чтобы $2yx^2 - bx + \frac{a^2}{4} - c + ay + y^2$ был полным квадратом. Для этого найдем его дискриминант $D = b^2 - 8y(\frac{a^2}{4} - c + ay + y^2) = b^2 - 2ya^2 + 8yc - 8y^2a - 8y^3$ и его дискриминант должен быть равен нулю. $D = 0 \iff b^2 - 2ya^2 + 8yc - 8y^2a - 8y^3 = 0 \iff 8y^3 + 8ay^2 + (2a^2 + 8c)y - b^2 = 0$. Получаем кубическое уравнение, решив которое легко найти корни исходного уравнения, просто подставив $y$ в $(x^2 + \frac{a}{2} + y)^2 = 2yx^2 - bx + \frac{a^2}{4} - c + ay + y^2$ где правая часть полный квадрат, и можно извлечь корень и получить квадратное уравнение. $x^2 + a + y = \pm\sqrt{2yx^2 - bx + \frac{a^2}{4} - c + ay + y^2}$

## 3 Способ преобразования многочлена

В работе будет использоваться только один вид преобразования - движение или же замена вида $x = y + x_0$ что на графике будет выглядить как движение(рис.1). Докажем единственную формулу которая нам понадобится.

$f(x)$ - это многочлен степени $n$, тогда для нее справедливо

$$f(x + x_0) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)x^i}{i!} \qquad (1)$$

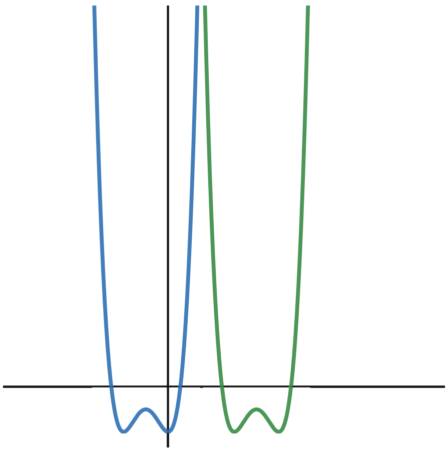

Рис. 1: Синий - многочлен f(x), зеленый - многочлен f(x-5)

Докозательство:

Будем использовать математическую индукцию для доказательства.

База:

$f(x) = ax + b$ - многочлен 1 степени. $f(x + x_0) = a(x + x_0) + b = ax + ax_0 + b = ax_0 + b + \frac{ax}{1} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)x}{1!}$ легко заметить что формула для первой степени работает.

Шаг:

Предположим формула верна для многочлена степени $k$, тогда рассмотрим многочлен $f(x)$степени $k + 1$. Тогда $f(x)$ можно представить в виде $(x + a)g(x)$, где $g(x)$ многочлен степени $k$. Тогда $f(x + x_0) = (x + x_0 + a)g(x + x_0) = xg(x + x_0) + (x_0 + a)g(x + x_0) = x(g(x_0) + \frac{g'(x_0)x}{1!} + \frac{g''(x_0)x^2}{2!} + \dots + \frac{g^{(k)}(x_0)x^k}{k!}) + (x_0 + a)(g(x_0) + \frac{g'(x_0)x}{1!} + \frac{g''(x_0)x^2}{2!} + \dots + \frac{g^{(k)}(x_0)x^k}{k!}) = (x_0 + a)g(x_0) + \frac{(g(x_0) + (x_0+a)g'(x_0))x}{1!} + \frac{(2g'(x_0) + (x_0+a)g''(x_0))x^2}{2!} + \dots + \frac{(kg^{(k-1)}(x_0) + (x_0+a)g^{(k)}(x_0))x^k}{k!} + \frac{g^{(k)}(x_0)x^{k+1}}{k!}$ Заметим, что $(x_0 + a)g(x_0) = f(x_0)$, так же $ig^{(i-1)}(x) + (x_0 + a)g^{(i)}(x) = f^{(i)}(x)$(докозательство позже), так же $\frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} = \frac{(k+1)g^{(k)}(x_0)}{(k+1)!} = \frac{(k+1)g^{(k)} + g^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}$ так как $g(x)$ многочлен степени $k$ и $g^{(k+1)} = 0$ тогда $f(x + x_0) = (x_0 + a)g(x_0) + \frac{(g(x_0) + g'(x_0))x}{1!} + \frac{(2g'(x_0) + g''(x_0))x^2}{2!} + \dots +$

$\frac{(kg^{(k-1)}(x_0)+g^{(k)}(x_0))x^k}{k!} + \frac{g^{(k)}(x_0)x^{k+1}}{k!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)x}{1!} + \frac{f''(x_0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)x^n}{n!} = \sum_{i=0}^{k+1} \frac{f^{(i)}(x_0)x^i}{i!}$, по индукции это формула верна для любого многочлена степени $n$.

Теперь докажем что $f^{(i)}(x) = ig^{(i-1)}(x) + (x+a)g^{(i)}(x)$. Доказывать будем опять через математическую индукцию.

База:

$f'(x) = ((x+a)g(x))' = (x+a)'g(x) + (x+a)g'(x) = g(x) + (x+a)g'(x)$, легко заметить что это справедливо для первой производной.

Шаг:

Предположим что это верно для k-й производной тогда $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))' = (kg^{(k-1)}(x) + (x+a)g^{(k)}(x))' = kg^{(k)}(x) + ((x+a)g^{(k)}(x))' = kg^{(k)}(x) + (x+a)'g^{(k)}(x) + (x+a)g^{(k+1)}(x) = (k+1)g^{(k)}(x) + (x+a)g^{(k+1)}(x)$, по индукции это верно для любой производной.

# 4 Многочлен с симметричным графиком

Многочлен 4-й степени может быть с симметричным графиком или без него(рис.2). Назовем многочлен с симметричным графиком, если существует прямая параллельная оси ординат относительно которой график многочлена является симметричным. Или же можно определить это так: многочлен $f(x)$ называется с симметричным графиком если существует $x_0$ что для каждого $x$ выражение $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$ является верным.

Докажем эквивалентность этих определений. Для этого потребуется определение симметрии относительно прямой. Множество точек на плоскости называется симметричным относительно прямой, называемой осью симметрии, если любой точке из множества соответствует точка из того же множества, находящаяся на том же расстоянии от оси симметрии и прямая, образованная этими точками, перпендикулярна оси симетрии.

Первое определение: Многочлен называется с симметричным графиком если множество точек графика многочена симметрично относительно прямой параллельной оси ординат.

Второе определение: Многочлен $f(x)$ называется с симметричным графиком если $\exists x_0 : \forall x$ $f(x_0 + x) = f(x_0 - x)$.

Рассмотрим первое определение. Так как ось симметрии параллельна оси ординат то уравнение такой прямой можно записать в виде $x = x_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Так же рассмотрим множество точек графика многочлена $f(x)$ и обозначим ее как $F$. Элементами этого множества можно в общем виде записать так $(a; f(a))$. Расстояние от точки $(a; f(a))$ до прямой $x = x_0$ будет $|a - x_0|$ так как прямая параллельна оси ординат и перпендикуляр к ней будет параллелен

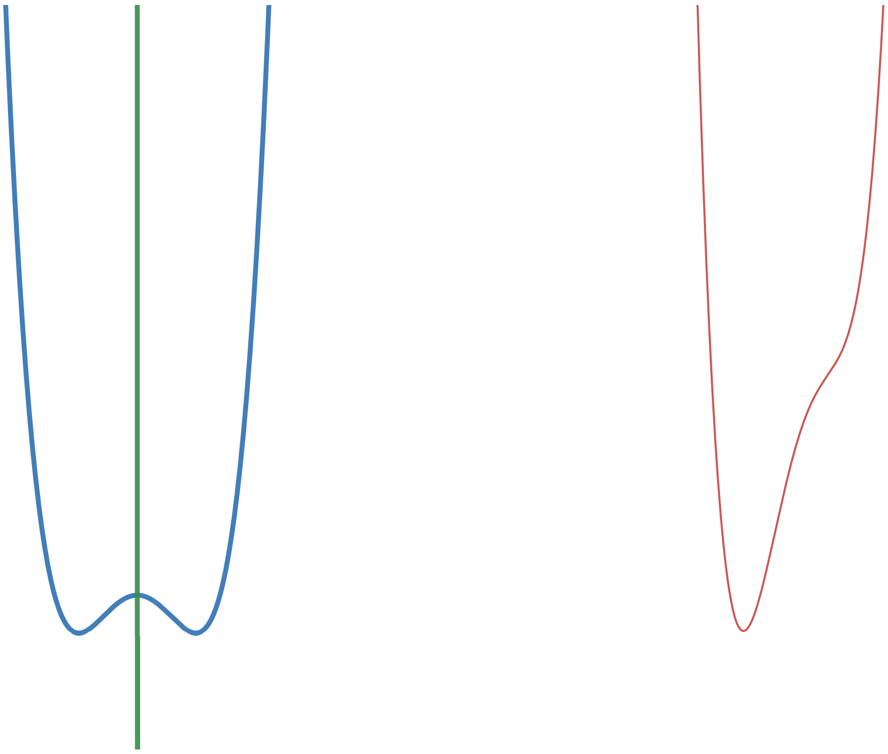

Рис. 2: Слева многочлен с симметричным графиком(синим цветом сам многочлен 4 степени, зеленым цветом ось симметрии), справа многочлен 4 степени с не симетричным графиком

оси абцис.

Исходя из первого определения существует такая прямая $x = x_0$, что для каждой точки из $F$ должна существовать точка, принадлежащая множеству $F$ и быть на равном расстоянии от оси симметрии. Если написать формально $\exists x_0 : \forall a((a; f(a)) \in F)\ \exists b : (b; f(b)) \in F, |a - x_0| = |b - x_0|$. Раскрываем модули 2 способами:

1. $a - x_0 = b - x_0 \iff a = b$ этот вариант не подходит так как это возможно только если точка на оси симметрии.

2. $a - x_0 = x_0 - b \iff b = 2x_0 - a$ этот ваирант подходит потому, что не противоречит условию.

Так же прямая, образованная этими точками должна быть перпендикулярна оси симметрии, значит должна быть параллельна оси абцисс, что может быть только в одном случае $f(a) = f(b)$. Допустим $a = x_0 + c$ тогда пользуясь ранее найденному соотношению $b = 2x_0 - a \iff b = x_0 - c$ отсюда следует, что $f(x_0 + c) = f(x_0 - c)$. То есть из первого опеределения следует второе определение.

Теперь рассмотрим второе опеределение. Рассмотрим две точки $(x_0 + a; f(x_0 + a))$ и $(x_0 - a; f(x_0 - a))$. По опеределению $f(x_0 + x) = f(x_0 - a)$ для любого $x$, значит точки можно переписать в виде $(x_0 + a; b)$ и $(x_0 - a; b)$. Расстояния до прямой $x = x_0$ от этих точек равно

$|x_0-(x_0+a)|=|-a|$ и $|x_0-(x_0-a)|=|a|$ соответсвенно. Так как $|a|=|-a|$ расстояния от этих точек до прямой $x=x_0$ равны. Так же из-за того, что ординаты точек равны - прямая, образованная точками, перпендикулярна оси ординат. В сумме эти два утверждения дают нам первое определение, значит из второго определения следует первое. Из-за того, что из первого определения следует второе и наоборот, то эти определения эквивалентны.

## 4.1 Частный пример симметрии

Из определения многочлена с симметричным графиком $\exists x_0 \forall x : f(x_0+x)=f(x_0-x)$ можно выделить частный пример, когда $x_0=0 \implies f(-x)=f(x)$. Это в свою очередь является определением четной функции в общем виде, четный многочлен 4-й степени будет выглядить так $ax^4+bx^2+c$. Так же уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$ называют биквадратным и корни легко находятся решением квадратного уравнения после замены $y=x^2$. Отсюда следует, что любое биквадратное уравнение можно представить в виде $g(x^2)$ где $g(x)$ это квадратный многочлен. Так же любой многочлен с симметричным графиком легко сводится к четному многочлену после замены $x=y-x_0 \implies f(x_0+(y-x_0))=f(x_0-(y-x_0)) \iff f(y)=f(-y)$. И можно утверждать, что если многочлен после линейной замены может стать четным, то оно имеет симметричный график.

Теорема 1.

Если многочлен после линейной замены стал четным, то многочлен изначально был с симметричным графиком.

Докозательство:

Возмем многочлен $f(x)$ и после замены $g(x)=f(x+x_0)$ получилось так, что $g(x)$ четный многочлен, отсюда следует, что $g(x)=g(-x)$. Теперь произведем обратную замену $f(x)=g(x-x_0)$ и рассмотрим значение $f(x_0+x)=g(x_0+x-x_0)=g(x)=g(-x)=g(x_0-x-x_0)=f(x_0-x) \iff f(x_0+x)=f(x_0-x)$ что является определением многочлена с симметричным графиком.

В частности отсюда следует, что любой многочлен нечетной степени никогда не будет с симметричным графиком.

Теорема 2.

Если многочлен нечетной степени, то тогда оно не с симметричным графиком.

Докозательство:

Предположим нашелся такой многочлен нечетной степени, который с симметричным графиком. Значит, после линейной замены оно может стать четным. Но после линейной замены степень многочлена сохраняется, также многочлен нечетной степени не может быть четным многочленом. Отсюда следует, что многочлен с нечетной степенью точно с не симметричным графиком.

## 4.2 Инвариант многочлена 4-й степени

Рассмотрим многочлены $f(x)$ и $g(x)$, а так же их композицию $f(g(x))$. Докажем один важный факт о композии.

Теорема 3.

Если $g(x)$ с симметричным графиком, то композиция $f(g(x))$ тоже с симметричным графиком.

Докозательство:

$g(x)$ - симметричный многочлен $\iff \exists x_0 : \forall x \; g(x_0+x) = g(x_0-x)$. Рассмотрим композицию $f(g(x))$. $g(x_0+x) = g(x_0-x) \iff f(g(x_0+x)) = f(g(x_0-x))$.

Теперь рассмотрим многочлен 1-й, 2-й и 3-й степени. Как можно догодаться, многочлены 1-й и 3-й степени не имеют симметричный график, исходя из второй теоремы.

А вот многочлен 2-й степени, всегда с симметричным графиком(Теорема 4.) и это можно доказать.

Докозательство:

$f(x) = ax^2+bx+c$ - общий вид многочлена 2-й степени. Теперь сделаем замену $x = y - \frac{b}{2a} \implies f(y-\frac{b}{2a}) = a(y-\frac{b}{2a})^2 + b(y-\frac{b}{2a}) + c = ay^2 - by + \frac{b^2}{4a} + by - \frac{b^2}{2a} + c = ay^2 + c - \frac{b}{4a}$. Так как $ay^2 + c - b/4a = a(-y)^2 + c - b/4a$ то есть полученный многочлен четный, отсюда следует, что многочлен $f(x)$ с симметричным графиком по теореме 1.

Но вот с многочленом 4-й степени в общем виде, не все так просто. Как было показанно на (рис.2) многочлен 4-й степени может быть и с симметричным графиком и без него. Но любой многочлен 4-й степени с симметричным графиком можно представить, как композицию двух квадратных многочленов. $f(x) = x^2 + a_1x + b_1$ $g(x) = x^2 + a_2x + b_2$ $f(g(x))$ - симметричный многочлен 4-й степени. Многочлен $f(g(x))$ является симметричным по теореме 3. Докажем, что других вариантов нет.

Теорема 5.

Любой многочлен 4-й степени с симметричным графиком можно представить как композицию двух квадратных многочленов.

Докозательство:

Возмем многочлен 4-й степени с симметричным графиком. Тогда из первой теоремы следует, что после линейной замены многочлен может стать четным и иметь вид $f(x^2)$ где $f(x)$ это квадратный многочлен. Тогда при обратной замене этот многочлен будет имет вид $f((x-x_0)^2)$ так как $(x-x_0)^2$ это квадратный многочлен, значит, исходный многочлен 4-й степени можно было представить в виде композиции двух квадратных многочленов.

Теперь достаточно рассмотреть композицию двух квадратных многочленов $f(g(x))$ $f(x) = x^2 + a_1x + b_1$ $g(x) = x^2 + a_2x + b_2 \implies f(g(x)) = (x^2 + a_2x + b_2)^2 + a_1(x^2 + a_2x + b_2) + b_1 = x^4 + a_2^2x^2 + b_2^2 + 2a_2x^3 + 2b_2x^2 + 2a_2b_2x + a_1x^2 + a_1a_2x + a_1b_2 + b_1 = x^4 + 2a_2x^3 + (a_2^2 + 2b_2 + a_1)x^2 + (2a_2b_2 + a_1a_2)x + b_2^2 + a_1b_2 + b_1$ Теперь приравняем это многочлену 4-й степени общего вида. $x^4 + 2a_2x^3 + (a_2^2 + 2b_2 + a_1)x^2 + (2a_2b_2 + a_1a_2)x + b_2^2 + a_1b_2 + b_1 = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Получаем следущую систему уравнение.

$$\begin{cases} a = 2a_2 \\ b = a_2^2 + 2b_2 + a_1 \\ c = 2a_2b_2 + a_1a_2 \\ d = b_2^2 + a_1b_2 + b_1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 = \frac{a}{2} \\ b = \frac{a^2}{4} + 2b_2 + a_1 \\ c = ab_2 + \frac{a_1a}{2} \\ d = b_2^2 + a_1b_2 + b_1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 = \frac{a}{2} \\ b - \frac{a^2}{4} = 2b_2 + a_1 \\ \frac{2c}{a} = 2b_2 + a_1 \\ d = b_2^2 + a_1b_2 + b_1 \end{cases} \implies$$

$$\implies b - \frac{a^2}{4} = \frac{2c}{a} \iff 4ab - a^3 = 8c \iff a^3 - 4ab + 8c = 0$$

Так же это соотношение можно вывести с помощью доказонной формуле 1. в разделе 3. $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, тогда $f(x + x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)x}{1!} + \frac{f''(x_0)x^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)x^3}{3!} + \frac{f''''(x_0)x^4}{4!}$.

Если $f(x)$ - с симмитричным графиком то должен существовать такое $x_0$ что $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) = 0 \end{cases}$ по теореме 1. Теперь посмотрим на систему и попробуем решить ее.

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f'''(x_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_0^3 + 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0 \\ 24x_0 + 6a = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 4x_0^3 + 3ax_0^2 + 2bx_0 + c = 0 \\ x_0 = \frac{-a}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} 4(\frac{-a}{4})^3 + 3a(\frac{-a}{4})^2 + 2b(\frac{-a}{4}) + c = 0 \\ x_0 = \frac{-a}{4} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \frac{-a^3}{16} + \frac{3a^3}{16} - (\frac{ab}{2}) + c = 0 \\ x_0 = \frac{-a}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{a^3}{8} - (\frac{ab}{2}) + c = 0 \\ x_0 = \frac{-a}{4} \end{cases} \iff a^3 - 4ab + 8c = 0$$

Так же это соотношение является инвариантом для многочлена 4 степени относительно движения. Если не было бы этого свойства, то многочлен с симметричным графиком после движение мог стать ассимметричным и наоборот, но благодаря визуализации понятно, что это не так.

Теорема 6.

Значение $a^3 - 4ab + 8c$ сохраняется при движении.

Доказательство:

Возьмем многочлен $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ для него соотношение будет иметь классический вид $a^3 - 4ab + 8c$. Теперь возьмем движение многочлена $f(x + x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)x}{1!} + \frac{f''(x_0)x^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)x^3}{3!} + \frac{f''''(x_0)x^4}{4!}$ для него соотношение будет таким: $(\frac{f'''(x_0)}{3!})^3 - 4(\frac{f'''(x_0)}{3!})(\frac{f''(x_0)}{2!}) + 8(\frac{f'(x_0)}{1!}) \iff (4x_0 + a)^3 - 4(4x_0 + a)(6x_0^2 + 3ax_0 + b) + 8(4x_0^3 + 3ax_0^2 + 2bx_0 + c) = 64x_0^3 + 48ax_0^2 + 12a^2x_0 + a^3 - 96x_0^3 - 48ax_0^2 - 16bx_0 - 24ax_0^2 - 12a^2x_0 - 4ab + 32x_0^3 + 24ax_0^2 + 16bx_0 + 8c = a^3 - 4ab + c$ как можно увидеть после раскрытия скобок все сократилось кроме $a^3 - 4ab + 8c$, это значит, что после движения, это соотношение остается неизменным.

## 4.3 Пример решения

Теперь для примера решим простое уравнение $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$. Для начала убедимся в том, что уравнение имеет симметричный график. Для этого найдем $a^3 - 4ab + 8c$. $a^3 - 4ab + 8c = -4^3 + 16 + 48 = -64 + 64 = 0$. Тут получили 0, значит, это симметричное уравенение. Далее нужно сделать замену $f(x+x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)x}{1!} + \frac{f''(x_0)x^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)x^3}{3!} + \frac{f''''(x_0)x^4}{4!}$. Найдем такое $x_0$, чтобы $f'''(x_0) = 0 \iff 4x_0 - 4 = 0 \iff x_0 = 1$. Далее сделаем замену $x = x_1 + 1$, так как уравнение симметричное, то при замене обнулится не только коэффициент при $x^3$, но и при $x$. И получится уравнение $\frac{f''''(1)x_1^4}{4!} + \frac{f''(1)x_1^2}{2!} + f(1) = 0$. Теперь вычислим коэффициент. $f''''(1) = \frac{24}{4!} = 1$

$f''(1) = 6(1)^2 - 12 * 1 + 1 = 7 - 12 = -5$

$f(1) = 1^4 - 4 * 1^3 + 1^2 + 6 * 1 + 2 = 1 - 4 + 1 + 6 + 2 = 6$.

Уравнение принимает вид $x_1^4 - 5x_1^2 + 6 = 0$. Сделаем замену $x_2 = x_1^2$ и получаем квадратное уравнение $x_2^2 - 5x_2 + 6 = 0$, корни которого легко находятся, они равны 2 и 3. Отсюда следует, что $x_1 = \pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{3} \implies x = 1 \pm \sqrt{2}; 1 \pm \sqrt{3}$.

# 5 Несимметричные уравнения

К сожалению, не все уравнения 4-й степени симметричные, намного чаще встречаются несимметричные, как бы нам не хотелось обратного. Из-за этого нужно научиться решать несимметричные уравение, а точнее научиться преобразовывать несимметричные уравнение так, чтобы было легко решать.

## 5.1 Возвратные уравнения и их решение

Математики давно умеют решать возвратные уравнения. В общем виде возвратное уравнение для уравнения 4-й степени выгляди так $x^4 + ax^3 + bx^2 + acx + c^2 = 0$. Нуль точно не решение такого уравнение если $c^2 \neq 0$. Тогда можно поделить уравнение на $x^2$ и получится $x^2 + ax + b + \frac{ac}{x} + \frac{c^2}{x^2} = 0 \iff x^2 + \frac{c^2}{x^2} + ax + \frac{ac}{x} + b = 0 \iff (x + \frac{c}{x})^2 - 2c + a(x + \frac{c}{x}) + b = 0$. Делаем замену $x_1 = x + \frac{c}{x}$ и получаем квадратное уравнение $x_1^2 + ax_1 + b - 2c = 0$. Дальше нужно просто найти корни квадратного уравнения и сделать обратную замену, найдя таким образом корни исходного уравнения.

## 5.2 Преобразование уравнения к возвратному

Теперь, хотелось бы научиться сводить любое уравнение 4-й степени к возвратному уравнению. Возьмем многочлен 4 степени в общем виде $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ и, чтобы оно было возвратным, должно выполняться $d = (\frac{c}{a})^2 \iff a^2d = c^2 \iff a^2d - c^2 = 0$. Теперь рассмотрим движение многочлена. $f(x+x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)x}{1!} + \frac{f''(x_0)x^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)x^3}{3!} + \frac{f''''(x_0)x^4}{4!}$ чтобы движение многочлена можно было представить, как возвратный многочлен, должно выполняться $(\frac{f'''(x_0)}{3!})^2 f(x_0) - (\frac{f'(x_0)}{1!})^2 = 0 \iff (4x_0 + a)^2(x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d) - (4x_0^3 + 3ax_0^2 + 2bx_0 + c)^2 = 0$. Теперь нужно раскрыть скобки, чтобы получить уравнение.

$(4x_0 + a)^2(x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d) - (4x_0^3 + 3ax_0^2 + 2bx_0 + c)^2 = 0 \iff$

$(x_0^4 + x_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d)(16x_0^2 + 8ax_0 + a^2) - (16x_0^3 + 9a^2x_0^4 + 4b^2x_0^2 + c^2 + 24ax_0^5 + 16bx_0^4 + 8cx_0^3 + 12abx_0^3 + 6acx_0^2 + 4bcx_0) = 0 \iff$

$16x_0^6 + 8ax_0^5 + a^2x_0^4 + 16ax_0^5 + 8a^2x_0^4 + a^3x_0^3 + 16bx_0^4 + 8abx_0^3 + a^2bx_0^2 + 16cx_0^3 + 8acx_0^2 + a^2cx_0 + 16dx_0^2 + 8adx_0 + a^2d - 16x_0^3 - 9a^2x_0^4 - 4b^2x_0^2 - c^2 - 24ax_0^5 - 16bx_0^4 - 8cx_0^3 - 12abx_0^3 - 6acx_0^2 - 4bcx_0 = 0$

На первый взгляд получилось уравнение 6 степени, но степени 6,5 и 4 сократятся и после группировки останется следующее уравнение:

$(a^3 - 4ab + 8c)x_0^3 + (a^2b + 16d - 4b^2 + 2ac)x_0^2 + (a^2c + 8ad - 4bc)x_0 + a^2d - c^2 = 0$

После сделать замену и $f(x+x_0)$ будет возвратным уравнением. Интересное в этом уравнение то, что старший коэффициент - это соотношение для нахождения многочлена с симметричным графиком. И можно утверждать, что для любого несимметричного уравнения можно найти такое $x_0$, чтобы после движения оно стало возвратным.

## 5.3 Пример решения

Для примера решим простое уравнение, корни которого легко угадываются и без формулы $x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30 = 0$. Для начала нужно проверить не является ли уравнение симметричным. $a^3 - 4ab + 8c = (-11)^3 - 4(-11) * 41 + 8(-61) = -1331 + 1804 - 488 = -15$. Как можно увидеть, оно не равно нулю, значит, уравнение не симметричное, но эти вычисления нам еще понадобятся. Вычислим остольные коэффициенты.

$a^2b + 16d - 4b^2 + 2ac = 59$

$a^2c + 8ad - 4bc = -17$

$a^2d - c^2 = -91$.

Получаем следущее уравнение 3-й степени $-15x^3 + 59x^2 - 17x - 91 = 0$. Можно решить это уравнение с помощью метода Кардано, но заметим, что -1 - корень этого уравнения. Далее делаем замену $x = x_1 - 1$. $(x_1 - 1)^4 - 11(x_1 - 1)^3 + 41(x_1 - 1)^2 - 61(x_1 - 1) + 30 = 0$. Можно самому вручную раскрыть скобки или же воспользоваться первой формулой, но так или иначе получится $x_1^4 - 15x_1^3 + 80x_1^2 - 180x_1 + 144 = 0 \iff x_1^2 - 15x_1 + 80 - \frac{180}{x_1} + \frac{144}{x_1^2} = 0 \iff x_1^2 + \frac{12^2}{x_1^2} - 15(x_1 + \frac{12}{x_1}) + 80 = 0 \iff (x_1 + \frac{12}{x_1})^2 - 15(x_1 + \frac{12}{x_1}) + 80 - 24 = 0 \iff (x_1 + \frac{12}{x_1})^2 - 15(x_1 + \frac{12}{x_1}) + 56 = 0$, далее делаем замену и находим корни, после чего делаем обратную замену.

# 6 Выводы

После этой работы можно заметить, что уравнение 4-ой степени связано не меньше, с уравнением 3-ей степени чем со 2-ой степенью. Каждый раз решая уравнение 4-ой степени мы приходим к решению уравнения 3-ей степени. В работе был показан новый метод решения уравнений 4-ой степени с помощью движения многочлена. Рассмотрен случай многочлена с симметричным графиком и превращение уравнения в биквадратное. Так же был рассмотрен общий вид уравнения 4-ой степени и преобразование его в возвратное. Что еще раз доказывает, что есть многое, что пока не найдено. Новый метод после преобразования изменяет корни уравнение и из-за этого любое уравнение 4-й степени можно изменять как угодно. Предыдущие методы убирали второй(после старшего) коэффицента, представляли в виде произведения квадратных многчленов, но не превращали его в возвратное или в биквадратное что намного интереснее, на мой взгляд.