Генеральный партнер олимпиады — Сбербанк — приветствует участников! Сбер сегодня — это команда единомышленников, которые разрабатывают новые крутые технологии, чтобы сделать жизнь ярче и интереснее. Для нас твоё участие в состязаниях по профилю «Математика» означает, что ты не боишься принимать сложные вызовы, готов браться за сложные задачи и обладаешь великим даром доказательства недоказуемого :). Верим в тебя, искреннее желаем удачи на заключительном этапе!

Время выполнения заданий — 240 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Задача 10.1. *(15 баллов)* Можно ли число 2024 представить в виде a^3+b^2, где a и b — натуральные числа?

Задача 10.2. *(15 баллов)* Сколько существует таких приведённых квадратных трёхчленов $f(x)=x^2+px+q$ с целыми коэффициентами, что $f(f(1000))=0$?

Задача 10.3. *(15 баллов)* В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, точки E и F — основания биссектрис BI и CI соответственно. Прямая AI пересекает описанную около треугольника EIF окружность в точке $T \neq I$. Докажите, что ортоцентр треугольника AEF равноудалён от точек T и I.

Задача 10.4. *(15 баллов)* Многие учащиеся математического кружка остаются в нём преподавать после выпуска. Будем говорить, что Ваня является *последователем* Саши, если Ваня учился у Саши или если Ваня учился у ученика Саши, ученика ученика Саши и так далее. Преподаватель кружка называется *народным*, если у него есть последователи, и не менее половины из них — победители международной олимпиады IMO. Известно, что всего в кружке училось 100 победителей IMO. Какое наибольшее количество народных преподавателей может быть в этом кружке, если у каждого человека не более одного учителя и никто не является собственным последователем?

Задача 10.5. *(20 баллов)* Окружность ω описана около треугольника ABC. Биссектриса AL пересекает ω в точке $S \neq A$. Докажите, что длина проекции отрезка AS на прямую AB больше длины отрезка AL.

Задача 10.6. *(20 баллов)* По кругу расставлены натуральные числа. Петя поделил каждое из них на натуральное число, ближайшее к среднему геометрическому соседних чисел. Оказалось, что все полученные числа — натуральные. Чему может быть равно наибольшее из них?