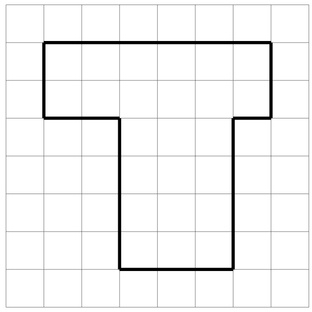
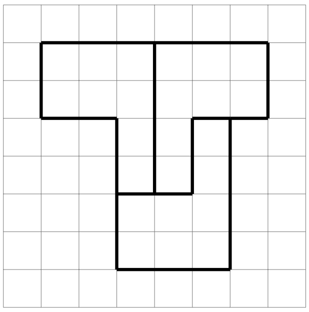
Решения.

Задача 7.1. *(15 баллов)* Разрежьте фигуру (см. рисунок справа) на три равные части по сторонам клеток. Части можно поворачивать и переворачивать.



Решение.



Задача 7.2. *(15 баллов)* Даны две одинаковые стопки из восьми карточек, на которых написаны числа 0, 1, 2, ..., 7. Можно ли разложить эти карточки по кругу так, чтобы нули лежали рядом, между единицами лежала ровно одна карточка, ..., между карточками с числом k лежало ровно k карточек, ..., между карточками с числом 7 лежало ровно 7 карточек?

Решение.

Можно. Расставим карточки в таком порядке по кругу: 5, 3, 1, 7, 1, 3, 5, 6, 4, 0, 0, 7, 2, 4, 6, 2. Несложно проверить, что между одинаковыми карточками нужное количество других: например, между карточками с числом 4 расположены карточки с 0, 0, 7 и 2.

Задача 7.3. *(15 баллов)* Полина и Вика загадали два целых числа: a и b, при этом оказалось, что $a > b$. Полина нашла значение выражения $a^3 - a^2 + 2024a$, а Вика нашла значение выражения $b^3 - b^2 + 2024b$. Могло ли Полинино число оказаться меньше Викиного?

Решение.

Рассмотрим разность новых чисел:

$$a^3 - a^2 + 2024a - b^3 + b^2 - 2024b = (a-b)(a^2 + ab + b^2 - a - b + 2024) = (a-b)\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2+a^2-2a+1+b^2-2b+1+4046) = \frac{1}{2}(a-b)((a+b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2+4046).$$

Множитель в первых скобках положителен, поскольку $a > b$, а во вторых — поскольку равен сумме нескольких квадратов (каждый из которых неотрицателен) и положительного числа 4046. Получается, что новое Полинино число всегда будет больше Викиного.

Критерии.

A1: +2 балла — рассмотрена разность чисел;

A2: +4 балла — в разности вынесено за скобки выражение $a - b$.

Критерии A1 и A2 суммируются.

B1: 0 баллов — попытка перебора положительных/отрицательных значений a и b, а также сравнения модулей, не доведённая до конца.

Задача 7.4. *(15 баллов)* Дана таблица с 8 строками и 5 столбцами, Петя и Вася по очереди ставят в клетки таблицы крестики и нолики. За ход Петя ставит два крестика (или, если осталось одно незаполненное поле, то 1 крестик), а Вася ставит один нолик. Начинает Петя. Игра заканчивается, когда все клетки таблицы заполнены. Если есть строка, заполненная только крестиками, побеждает Петя, иначе Вася. Кто из них может гарантировать себе победу?

Решение.

Если в таблице хотя бы 8 строк, побеждает Петя. Действительно, он может сначала в каждую строку поставить по крестику — это 4 хода, Вася за 4 хода поставит по нолику не более чем в 4 из этих строк. Дальше Петя выбирает 4 строки, которые пока не содержат ноликов, и за два хода ставит в них по второму крестику. Вася «испортит» не более двух строк. Затем Петя одним ходом ставит по крестику в две строки без ноликов и ещё одним ходом ставит два последних крестика в ту из этих строк, в которой не появилось нолика. Таким образом, Петя гарантирует себе победу.

Задача 7.5. *(20 баллов)* По кругу стоит шесть коробок, в одной из них камень. За ход можно из коробки взять один камень и положить по одному камню в соседние с ней коробки. А можно наоборот пару камней в коробках через одну заменить одним камнем в коробке между ними. Через некоторое количество ходов снова остался один камень. Может ли этот камень лежать в коробке, соседней с исходной?

Решение.

Пронумеруем коробки по порядку числами от 1 до 6. Определим, как может меняться суммарное число камней в коробках с номерами 2, 3, 5 и 6. Если выполнить ход для тройки коробок 1, 2, 3 или 4, 5, 6, это число увеличится или уменьшится на два. Если выполнить ход для любой другой тройки коробок, это число не изменится.

В исходный момент суммарное число камней в коробках 2, 3, 5 и 6 равно нулю. Поскольку при любом ходе оно меняется на 2 или не меняется, оно всегда чётно, а значит, не может стать равным 1.

Критерии.

А1: 5 баллов — раскраска в два цвета: Ч Б Б Ч Б Б или Ч Б Ч Б Ч Б

Задача 7.6. *(20 баллов)* Назовём *расстоянием* между двумя клетками доски минимальное количество ходов, которое нужно шахматному коню, чтобы попасть из одной из них в другую. Назовём тройку клеток *правильной*, если попарные расстояния между ними одинаковые. Сколько правильных троек есть на доске 4×4?

Примечание. Конь ходит на две клетки по вертикали и затем на одну клетку по горизонтали, или наоборот, на две клетки по горизонтали и на одну клетку по вертикали.

Решение.

Прежде всего покрасим доску шахматной раскраской (т.е. в два цвета, так, чтобы соседние по стороне клетки были разных цветов). Заметим, что конь каждым своим ходом меняет цвет клетки, на которой стоит, на противоположный.

Теперь поймём, что все три клетки правильной тройки имеют один цвет. Действительно, в противном случае в тройке есть клетка, цвет которой совпадает с цветом одной из двух других клеток и не совпадает с цветом другой. Но тогда расстояния до них были бы различными, что ведёт к противоречию.

Значит, расстояние между клетками тройки должно быть кратно двум. Путём небольшого перебора можно убедиться, что это расстояние может быть равно только 2 или 4.

Посчитаем количество троек чёрного цвета (белые тройки считаются аналогично). Докажем вначале, что троек с расстоянием 4 не существует.

Поищем все пары клеток, расстояния между которыми равны 4. Вот их список: 1-6, 1-11, 6-16, 11-16, 3-9, 8-14. Между остальными парами расстояние 2 (для каждой пары несложно найти поле, через которое можно дойти от одной до другой). Однако, никакие три из расстояний, перечисленных выше, не образуют тройку, значит, правильных троек с расстоянием 4 не существует.

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

Теперь посчитаем тройки с расстоянием 2. Будем говорить, что пара клеток хорошая, если расстояние между клетками равно 2. Заметим, что две чёрные клетки, лежащие в противоположных углах, образуют хорошую пару. Чтобы получилась хорошая тройка, к ним можно добавить любую чёрную клетку, лежащую на стороне и при этом не в углу. Также, к любой из угловых клеток можно добавить хорошую пару клеток, лежащих на сторонах и не в углу. Таких хороших пар 4 (потому что не являющихся хорошими две, см. выше). Итого, правильных троек с участием хотя бы одной угловой клетки $4+2\cdot 4=12$. Теперь посмотрим на центральные клетки. Из аналогичных соображений есть 4 правильных тройки с участием двух центральных клеток, и, кроме того, для каждой из них есть по 4 правильных тройки с неугловыми клетками на стороне, итого тоже $4+2\cdot 4=12$. Значит, правильных троек чёрного цвета $12+12=24$. Точно таким же образом можно посчитать правильные тройки белого цвета, их также 24. Итого, $24\cdot 2=48$ правильных троек.

Ответ: 48.

Критерии.

А1: +2 балла — шахматная раскраска;

А2: +4 балла — чётность стороны и ограничение на 2 и 4;

А3: +4 балла — в правильной тройке сторона только 2;

А4: +10 баллов — подсчёт троек с расстоянием 2.

Критерии А1 – А4 суммируются.