Решения.

Задача 10.1. *(15 баллов)* Можно ли число 2024 представить в виде $a^3 + b^2$, где a и b — натуральные числа?

Решение.

Да, можно. Заметим, что $2024 = 1000 + 1024 = 10^3 + 32^2$.

Критерии.

0 баллов: утверждается, что нельзя, в доказательстве остатки/делимость;

5 баллов: идея перебора + ошибка в вычислениях/при переписывании степеней из условия.

Задача 10.2. *(15 баллов)* Сколько существует таких приведённых квадратных трёхчленов $f(x) = x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами, что $f(f(1000)) = 0$?

Решение.

Пусть $f(1000) = a$. Тогда, согласно условию, число a — корень трехчлена f, то есть $f(x) = (x - a)(x - b)$, где b — второй корень трёхчлена. Поскольку $a = f(1000)$ целое, число b также целое. Заметим, что b однозначно задаётся выбором a: $a = f(1000) = (1000 - a)(1000 - b)$, откуда $b = \dfrac{a}{1000 - a}$, потому в действительности нам достаточно посчитать количество таких целых чисел a, что число $\dfrac{a}{1000 - a}$ также целое.

Итак, задача свелась к подсчёту количества таких целых a, что $a \,\vdots\, 1000 - a$. Это условие равносильно делимости 1000 на $1000 - a$, поэтому количество искомых a равно числу целых делителей 1000. Это число равняется $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ (дополнительный множитель двойка появился из-за того, что отрицательные a нам также подходят).

Ответ: 32.

Критерии.

0 баллов: посчитано значение $f(f(1000))$ без дальнейших содержательных продвижений, или рассмотрен только случай $q = 0$, или рассматриваются действительные p и q вместо целых, или рассмотрен дискриминант без дальшейшего перехода к уравениям в целых числах;

7 баллов: рассмотрение дискриминанта с переходом к уравенениям в целых числах, получилось уравнение вида $ab = 4000$, где a и b целые. число решений не найдено или найдено неверно;

4 балла: начало авторского решения, написано выражение $\dfrac{a}{1000 - a}$, которое должно быть целым, или другое аналогичное выражение, дальшейших продвижений нет;

7 баллов: кроме предыдущего есть разумная попытка рассмотрения делителей 1000 с существенными проблемами (например, не объясняется, почему нужно рассматривать их, или почему им соответствуют трёхчлены с целыми коэффициентами);

-2 балла: авторское решение, потеряны отрицательные числа;

-1 балл: появление 33-го случая, который на самом деле не подходит;

-2 балла: то, что число делителей 1000 равно 16, утверждается без доказательства.

Задача 10.3. *(15 баллов)* В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, точки E и F — основания биссектрис BI и CI соответственно. Прямая AI пересекает описанную около треугольника EIF окружность в точке $T \neq I$. Докажите, что ортоцентр треугольника AEF равноудалён от точек T и I.

Решение.

Обозначим через O и H центр описанной окружности треугольника FIE и ортоцентр треугольника FAE соответственно. Заметим, что нам достаточно показать, что $OH \perp AI$, так как перпендикуляр из центра O на хорду TI является серединным перпендикуляром к ней.

Для начала покажем, что точки F, O, H и E лежат на одной окружности, а именно на окружности Γ, симметричной описанной окружности треугольника AEF относительно прямой FE. То, что на этой окружности лежит ортоцентр, хорошо известно.

Поскольку $\angle FIE = 90° + \dfrac{1}{2}\angle BAC > 90°$, точки I и O находятся в разных полуплоскостях относительно прямой EF, а значит, точки A и O находятся в одной полуплоскости относительно этой прямой. Тогда $\angle FOE = 2(180° - \angle FIE) = 2(180° - 90° - \dfrac{1}{2}\angle BAC) = 180° - \angle BAC$, потому $O \in \Gamma$.

Далее, если точки H и E лежат в разных полуплоскостях относительно FO, то $\angle OHE = \angle OFE = 90° - \dfrac{1}{2}\angle FOE = 90° - \angle FTE = 90° - \angle EIC = 90° - 90° + \dfrac{1}{2}\angle BAC = \angle IAB$. Потому, так как $EH \perp AF$, получаем $OH \perp AI$.

Если же точки H и E лежат в одной полуплоскости относительно FO, то аналогичным образом докажем, что $\angle OHF = \angle IAC$, и также получим, что $OH \perp AI$.

Таким образом, мы доказали, что если точки O и H различны, то прямая OH является серединным перпендикуляром к TI, а значит, $HT = HI$. Если же точки O и H совпадают, то H также равноудалена от точек T и I, поскольку является центорм окружности, на которой они лежат.

Критерии.

-1 балл: не разобран хотя бы один вырожденный случай (написанное решение для него не работает), например, $AB = AC$ или угол BAC прямой, или один из углов EFA или FEA прямой;

-2 балла: решение опирается на взимное расположение точек, рассмотрен только один из возможных случаев;

6 баллов: доказано, что точки E, F, H, O (центр описанной окружности EFI) лежат на одной окружности.

Задача 10.4. *(15 баллов)* Многие учащиеся математического кружка остаются в нём преподавать после выпуска. Будем говорить, что Ваня является *последователем* Саши, если Ваня учился у Саши или если Ваня учился у ученика Саши, ученика ученика Саши и так далее. Преподаватель кружка называется *народным*, если у него есть последователи, и не менее половины из них — победители международной олимпиады IMO. Известно, что всего в кружке училось 100 победителей IMO. Какое наибольшее количество народных преподавателей может быть в этом кружке, если у каждого человека не более одного учителя и никто не является собственным последователем?

Решение.

Построим ориентированный граф, вершинами которого будут учащиеся и преподаватели кружка, а ребро проводится от учителя к его ученику. Таким образом, наш граф представляет собой набор непересекающихся деревьев.

Ответ: 200.

Пример: Возьмём путь на 201 вершине, ориентируем рёбра сверху вниз и в нижние 100 вершин поставим победителей IMO. Тогда все вершины кроме самой нижней будут народными учителями.

Оценка: Рассмотрим все вершины, которые соответствуют народным учителям, никакой из предков которых не является народным учителем. Пусть в поддереве (не считая саму вершину) некоторой такой вершины s победителей IMO. Поскольку выбранной вершине соответствует народный учитель, среди его последователей не более s человек, не являющихся победителями IMO. Значит, всего в поддереве (считая корень) не более $2s+1$ вершины. Из них народным учителям могут соответствовать не более $2s$ вершин, так как найдётся хотя бы один человек, который никого не учил. Таким образом, число народных учителей в поддереве не может превышать число победителей IMO более чем в 2 раза.

Поскольку поддеревья, соответствующие выбранным нами народным учителям, не пересекаются, просуммировав по ним число народных учителей, получим, что оно не превышает удвоенное число победителей, то есть 200.

Критерии.

11 баллов: верная оценка;

4 балла: верный пример, возможно, с неверной оценкой (например, с суммированием победителей по несколько раз);

2 балла: пример на 199, легко превращающийся в пример на 200;

0 баллов: другой неверный пример;

6 баллов: пример + идея рассматривать народных учителей, которые не являются последователями других народных учителей, без дальнейших продвижений;

9 баллов: решение аналогично авторскому, без пояснений предполагается, что корень дерева — народный преподаватель;

13 баллов: решение аналогично авторскому, потеряно утверждение, что в дереве есть лист не корень, он не народный учитель.

Задача 10.5. *(20 баллов)* Окружность ω описана около треугольника ABC. Биссектриса AL пересекает ω в точке $S \neq A$. Докажите, что длина проекции отрезка AS на прямую AB больше длины отрезка AL.

Решение.

Заметим, что проекции отрезка AS на стороны AB и AC равны, потому без ограничения общности будем считать, что $AB > AC$. Обозначим через K и M проекции точки S на стороны AB и BC соответственно. Заметим, что точка M — середина отрезка BC, и она лежит на отрезке BL. Четырёхугольник $BKMS$ вписанный, поэтому $\angle AKL < \angle AKM = \angle BSM = 90^\circ - \angle CBS = 90^\circ - \angle BAS = 90^\circ - \angle KAL$, потому $\angle AKL + \angle KAL < 90^\circ$, следовательно, $\angle KLA$ тупой, откуда $AK > AL$.

Критерии.

-2 балла: сформулировано, что проекции точки S на прямые AB и AC и середина отрезка DC лежат на одной прямой — прямой Симпсона, нет других комментариев про взаимное расположение проекции;

-6 баллов: без доказательства используется, что точка K лежит на отрезке AB, если не применим предыдущий критерий;

-2 балла: неравенство делится на косинус половины угла треугольника, ничего не сказано про положительность косинуса;

-3 балла: доказано нестрогое неравенство;

-2 балла: не разобран хотя бы 1 вырожденный случай (написанное решение для него не работает);

-2 балла: используется, что медиана не короче биссектрисы без доказательства.

Задача 10.6. *(20 баллов)* По кругу расставлены натуральные числа. Петя поделил каждое из них на натуральное число, ближайшее к среднему геометрическому соседних чисел. Оказалось, что все полученные числа — натуральные. Чему может быть равно наибольшее из них?

Решение.

Ответ: 1, 2, 3.

Примеры: 1) 1, 1, 1;

2) 1, 1, 2;

3) 1, 2, 6, 2, 1.

Оценка: Предположим противное: пусть нам удалось придумать расстановку, в которой одно из отношений не меньше 4. Пусть по кругу стоят числа a_0,..., a_{n-1} (позиции будут нумероваться по модулю n).

Если ближайшее число к $\sqrt{a_i a_{i+2}}$ это s, то $a_i a_{i+2} \leqslant s(s+1)$, то есть среди этих чисел есть число, которое не больше s. Также для любого натурального k не может быть такого, что одно из этих чисел больше sk, а другое больше $\frac{s}{k}$, потому что $(sk+1)\cdot\frac{s+1}{k} = s^2+s+\frac{s+1}{k} > s(s+1)$.

Пусть не умаляя общности мы поделили a_0 на округлённое число $\sqrt{a_{n-1}a_1}$ и получили хотя бы 4. Тогда какое-то из чисел a_1 и a_{n-1} хотя бы в 4 раза меньше, чем a_0. Не умаляя общности $\frac{a_0}{a_1} \geqslant 4$.

Пусть $x_i = \frac{a_i}{a_{i+1}}$, тогда $x_0 \geqslant 4$. Произведение всех иксов равно 1, значит, есть $x_i < 1$. Рассмотрим минимальное такое j, что $x_j \leqslant 3$. Тогда $x_j = 3$, так как иначе рядом с числом a_j одно число больше $3a_j$, а другое больше $\frac{a_j}{3}$. Противоречие с уже доказанным для $k = 3$.

Таким образом, у нас есть $x_j = 3$. Заметим, что $\frac{x_t}{x_{t+1}} = \frac{a_t a_{t+2}}{a_{t+1}^2} \leqslant \frac{a_{t+1}(a_{t+1}+1)}{a_{t+1}^2} = 1+\frac{1}{a_{t+1}}$. Неравенство следует из того, что $a_t a_{t+2} \leqslant s(s+1)$ при $a_{t+1} \vdots s$.

Потому

$$\frac{4}{3} \leqslant \frac{x_0}{x_j} = \frac{x_0}{x_1}\frac{x_1}{x_2}...\frac{x_{j-1}}{x_j} \leqslant \left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a_j}\right).$$

Но $a_j = 3a_{j+1}$, тогда $a_{j+1} \geqslant 2$, то есть $a_j \geqslant 6$.

При этом для k от 0 до j: $a_{j-k} \geqslant 3^k a_j$, потому что отношения соседних не меньше 3.

Тогда $\frac{4}{3} \leqslant \left(1+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{18}\right)\ldots$ То есть $\frac{3}{4} \geqslant \left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{19}\right)\ldots$ Но по индукции верно неравенство $(1-u_1)\ldots(1-u_n) \geqslant 1-u_1-\ldots-u_n$.

Следовательно,

$$\frac{3}{4} \geqslant 1-\frac{1}{7}-\frac{1}{19}-\frac{1}{55}-\ldots > 1-\frac{1}{6}-\frac{1}{18}-\ldots > 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Противоречие. Таким образом, отношения больше 3 получить невозможно.

Критерии.

2 балла: пример для 3;

2 балла: примеры для 1 и 2;

0 баллов: пример только для 1 или только для 2.