

Вопрос **Инфо**

Уважаемые участники!

Олимпиадное задание по направлению «Математика» состоит только из инвариантной части. Это означает, что вам нужно постараться решить все задачи и ответить на все вопросы, чтобы претендовать на призовые места.

Работа оформляется в письменном виде на чистых листах А4. Во время выполнения заданий можно пользоваться черновиком (в качестве черновика разрешено использовать чистые листы бумаги, перед началом олимпиады покажите их на камеру). Фото/сканы и рукописной работы, и черновики загружаются в тестирующую систему **в конце состязания** (на это у вас будет 15 минут).

В последние 15 минут, когда таймер подсветится красным, выполнять задания запрещено: это время отведено на загрузку файлов. Если справитесь с заданиями раньше, можете не дожидаться последних 15 минут, а начинать загружать файлы и завершать работу, но с момента начала фотографирования/сканирования делать пометки в работе уже не разрешается.

Верим в ваш успех!

Вопрос 1

Балл: 100,00

Задания выполняются на листах бумаги. Вы можете использовать черновики. При выполнении записей на листах проверьте, что в обзор мобильной камеры попадают обе ваши руки.

Сюда вам необходимо прикрепить листы с готовыми решениями. Черновики прикрепляются в следующем вопросе.

Для регулирования размера изображений с заданиями можете использовать масштаб страницы

Олимпиада НИУ ВШЭ для студентов и выпускников «Высшая лига»
по направлению «Математика»

Время выполнения задания — 210 минут

Стоимость каждой задачи указана возле задачи. Суммарно можно набрать не более 100 баллов. Если сумма баллов за задачи больше 100 баллов, то результат приравнивается к 100 баллам.

1. [20 баллов] Рассмотрим $A, B \in M_{2024}(\mathbb{C})$. Пусть минимальный многочлен матрицы A равен $(x + 2024)^3$, а характеристический многочлен матрицы B равен x^{2024} . Более того, v – собственный вектор для A тогда и только тогда, когда v – собственный вектор для B . Докажите, что $B^{1350} = 0$.

2. [20 баллов] Пусть $f(x) = e^{\sin x}$. Докажите, что существуют два многочлена $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени не больше двух такие, что

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} + o(x^4)$$

и найдите их.

3. [20 баллов] Рассмотрим аналитическую функцию $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, где

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Пусть $f(z) \in \mathbb{R}$, если $\arg z = \pm \frac{\pi}{3}$. Докажите, что $f(\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}$.

4. [20 баллов] Пусть G – конечная неабелева группа и $Z(G)$ – её центр. Докажите, что

$$|Z(G)| \leq \frac{1}{4}|G|$$

и приведите пример конечной группы, для которой достигается равенство.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

«Математика»

5. [30 баллов] Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'(t) = x + yT(x, y) \\ x'(t) = -y + xT(x, y), \end{cases}$$

где $T(x, y) = e^{-x^4 - y^2}$. Существует ли решение $(x(t), y(t))$ определённое на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$,

$$-\infty \leq a < b \leq \infty$$

для которого $x(t)$ будет неограниченной функцией от t ?

6. [30 баллов] Дан додекаэдр с центром O в начале координат. Для прямой l , обозначим через $\varphi(l)$ сумму $\sum_P d(O, \pi_l(P))^2$. Здесь сумма берется по всем вершинам додекаэдра, и $d(O, \pi_l(P))$ расстояние от начала координат до ортогональной проекции вершины P на прямую l . Зависит ли $\varphi(l)$ от прямой l ?

«Математическая физика»

7. [30 баллов] В однородном шаре массы M и радиуса R сделан тонкий прямолинейный сквозной канал, середина которого находится на расстоянии $a < R$ от центра шара. Материальная точка массы m начинает движение сквозь канал без начальной скорости под действием гравитационного притяжения шара. Начальное положение точки — на поверхности шара, трение и другие силы, отличные от гравитационного взаимодействия шара и материальной точки, отсутствуют. Найдите время движения материальной точки сквозь канал до противоположного выхода на поверхность шара.

8. [30 баллов] Три электрических заряда величиной $q_1 = q_2 = q$ и $q_3 = 2q$ и одинаковой массы m покоятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной ℓ . Заряды попарно соединены невесомыми нерастяжимыми нитями длины ℓ . В некоторый момент времени нить, соединяющую одинаковые заряды q разрезают. Оцените в дипольном приближении полную мощность электромагнитного излучения в момент времени, когда заряды в процессе движения расположатся вдоль прямой линии. Движение зарядов происходит со скоростями много меньшими скорости света, всеми силами, кроме электростатических, а также потерями энергии на излучение за рассматриваемый период времени можно пренебречь.

ТЕХНИЧЕСКИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ЗАГРУЖАЕМЫМ ФАЙЛАМ ИЗОБРАЖЕНИЙ

- а) Листы с решениями должны сканироваться или фотографироваться в полную величину, качество изображения должно быть таким, чтобы текст комфортно читался с экрана 12-дюймового монитора, а размер загружаемых файлов был не слишком велик (при правильных настройках сканера/камеры и некоторой сноровке можно легко уложиться в 1 – 5 Мб на страницу).
- б) Изображения должны сохраняться на компьютере в формате jpeg или pdf и загружаться в экзаменационную систему в виде файлов с расширениями .jpg, .jpeg или .pdf.
- в) Изображение в загружаемом файле должно быть ориентировано так, чтобы прочтение текста не требовало поворота кадра на 90 или 180 градусов.
- г) В случае, если Вы фотографируете решения, следите за тем, чтобы
- плоскость камеры была строго параллельна плоскости листа
 - объектив располагался над листом строго по центру
 - в кадре не было перспективных искажений и больших бессодержательных полей за краями листа
 - никакие куски текста не остались за кадром.

Сначала убедитесь, что всё именно так, и только после этого нажимайте на спуск затвора. Если это позволяет Ваша камера, мы рекомендуем располагать объектив в 60 – 90 см над лежащим на столе листом и использовать зум, чтобы максимально эффективно вписать лист в кадр.

- д) Перед отправкой снимков или сканов на сайт убедитесь на экране своего монитора, что Ваши файлы удовлетворяют предыдущим требованиям (а–в) и при необходимости скорректируйте их (например, поверните изображение или смените расширение файла, если это необходимо).
- е) Выполнение настоящих требований является зоной ответственности участника. В случае, если загруженные изображения им не удовлетворяют, работа может быть аннулирована.