

Вопрос **Инфо**

Уважаемые участники!

Олимпиадное задание по направлению «Прикладная математика» состоит из двух частей:

**Инвариантная часть** представлена заданиями № 1–3. Их нужно выполнить всем участникам.

**Вариативная часть** разделена на треки:

- Трек «Математические методы анализа в экономике»: задания № 4–11.
- Трек «Математические методы в социологии»: задания № 12–13.
- Трек «Прикладная математика в инженерии и естественных науках»: задание № 14–18.

Вы можете сосредоточиться на выполнении заданий одного трека (чтобы претендовать на статус дипломанта I, II, III степени) или постараться решить наибольшее число задач вне зависимости от треков, чтобы претендовать на статус медалиста.

Во время выполнения заданий вы можете использовать встроенный в систему калькулятор.

Работа оформляется в письменном виде на чистых листах А4. Во время выполнения заданий можно пользоваться черновиком (в качестве черновика разрешено использовать чистые листы бумаги, перед началом олимпиады покажите их на камеру). Фото/сканы рукописной работы загружаются в тестирующую систему **в конце состязания** (на это у вас будет 15 минут).

Обратите внимание на то, что черновики к проверке **не принимаются**.

Использование сторонних ресурсов и справочных материалов строго запрещено.

Верим в ваш успех!

Вопрос **1**

Балл: 14,00

Перед вами стоит цель описать связь между **посещаемостью семинаров** и **итоговым баллом** по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» с помощью **уравнения линейной регрессии**. Случайным образом были отобраны 6 студентов (таблица 1), по которым получены данные о посещаемости (в % от общего числа семинаров) и итоговой оценке за дисциплину (по десятибалльной шкале). Например, студент №1 посетил 70% семинаров и получил за дисциплину 6 баллов.

Вам необходимо выполнить следующие задачи:

I. Раскройте **суть метода наименьших квадратов** (МНК) для поиска наиболее оптимальной регрессионной прямой.

II. С помощью метода наименьших квадратов (МНК) **рассчитайте регрессионное уравнение** вида  $Y=b_0+bX$ , наиболее точно описывающее связь посещаемости занятий с итоговой оценкой по дисциплине. Предоставьте подробное и аргументированное решение.

III. **Содержательно проинтерпретируйте** каждый регрессионный коэффициент полученного уравнения.

IV. Рассчитайте **регрессионные остатки** для каждого наблюдения.

Таблица 1

Студент	X (посещаемость)	Y (оценка)
№1	70	6
№2	40	4
№3	50	7
№4	100	8
№5	80	6
№6	20	5

Вопрос 2

Балл: 14,00

Let  $X_1, X_2$  be independent random variables that are uniformly distributed on the interval  $[a, 12]$ . We want to test the hypothesis  $H_0 : a = 0$  against  $H_1 : a = 2$ . The decision rule is as follows: reject null hypothesis if  $\min(X_1, X_2) > k$ . The power of the test is 0.36. Find the significance level of the test if  $k < 12$ .

Вопрос 3

Балл: 14,00

Линейная оболочка L содержит линейно независимые векторы  $f_1, f_2, f_3$ . Содержит ли оболочка L такой вектор  $x$ , что лишь две его компоненты отличны от нуля. Если да, каким образом он раскладывается в линейную комбинацию векторов  $f_1, f_2, f_3$ ?

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 11 \\ 9 \\ -13 \\ 24 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 8 \\ 9 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Вопрос 4

Балл: 7,25

Let  $X$  be a real matrix of size  $3 \times 2$  and  $Y$  a real matrix of size  $2 \times 3$ . Let

$$XY = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Find  $YX$ .

Вопрос 5

Балл: 7,25

Вычислите следующий интеграл:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx .$$

Вопрос 6

Балл: 7,25

A function  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is differentiable at  $x = 0$ , and there is a function  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + yg(x)$$

for all  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Find  $f(3)$  if it is known that  $f(1) = 2$  and  $f(2) = 1$ .

Вопрос 7

Балл: 7,25

Общеизвестно, что страна Воображляндия, где обитают всевозможные мифические существа, представляет собой трёхмерное евклидово пространство. В этой стране единороги Люмин и Итер соревнуются между собой, совершая прыжки в длину от парящего волшебного сферического камня в произвольном направлении.

Известно, что все координаты точки приземления единорогов — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием относительно волшебного камня. Значения дисперсий координат точек приземления одинаковы.

При очередном прыжке оказалось, что Итер приземлился в 4 метрах от волшебного камня, а

Люмин — на некотором расстоянии  $\rho$ , таком, что  $\rho > 4$ .

Люмин и Итер уже совершили множество прыжков. Поэтому известно, что вероятность того, что отношение длины прыжка Люмин к длине прыжка Итера оказалось не менее, чем  $\rho/4$ , составляет 0.05.

Чему равно  $\rho$ ?

Здесь по клику доступна таблица квантилей распределений. Для перехода по ссылке нажмите на неё правой кнопкой мыши и откройте ссылку в новой вкладке/в новом окне. При возникновении проблем скопируйте адрес гиперссылки и вставьте вручную в поисковую строку браузера в новом окне

Вопрос 8

Балл: 7,25

Пекарня печет пирожки с мясом и реализует их в собственном магазине. Каждый пирожок на три четверти состоит из теста и на одну четверть из начинки. Вес пирожка составляет  $z$  кг. Потери веса в процессе выпекания не существенны. Рецептuru соблюдается точно. Спрос на пирожки стабилен и равномерен. За период времени  $\theta$  реализуется  $N$  штук.

Для обеспечения производственного процесса осуществляется снабжение пекарни дискретными партиями сырья (мука и мясо) при полном исчерпании запасов. Временем доставки можно пренебречь. В соответствии с рецептурой в каждую партию снабжения входит три четверти муки и одна четверть мяса. Снабжение прочими ингредиентами, а также потери в процессе поставки и производства можно не учитывать. Грузоподъемность транспортного средства, перевозящего партию сырья составляет  $M$  килограмм.

Стоимость поставки муки в одной партии составляет  $c_{11}$  рублей, а стоимость поставки мяса в одной партии составляет  $c_{12}$  рублей. Стоимость хранения 1 кг муки в единицу времени составляет  $c_{21}$  рублей, 1 кг мяса —  $c_{22}$  рублей. Все прочие издержки производства не существенны.

Следует рассчитать вес партии поставки, который минимизирует суммарные издержки производства.

Указание. Все формулы должны быть обоснованы, т.е. выведены из условий задачи. Время можно считать непрерывной величиной.

Вопрос 9

Балл: 7,25

Solve the following differential equation:

$$y'' = \frac{y'}{\cos^2 y}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Вопрос 10

Балл: 7,25

Let  $X_1, \dots, X_n$  be a sample from the distribution with the following density function:

$$p_X(x) = \begin{cases} e^{\theta-x}, & x \geq \theta, \\ 0, & \text{elsewhere,} \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

1. Find an estimator of the parameter  $\theta$  via maximum likelihood method.
2. Justify whether the estimator you found in the previous task is consistent or not.

Вопрос 11

Балл: 7,25

The distribution of the number of chocolate candies that Juri eats per day is the random variable  $\xi$  which is described by the following table:

$\xi = x$	1	2	...	$n$	...
$\mathbb{P}(\xi = x)$	$p$	$2p^2$	...	$np^n$	...

Each candy may contain nutlets with probability 0.25 and does not depend on the other candies. Calculate the probability that Juri came across exactly 3 candies with nutlets if it is known that he ate from 4 to 7 candies (inclusive).

**Note.** The answer to this problem should be a number. If your answer is given as an expression or a function of  $p$ , you will not get maximum number of points for this task.

Вопрос 12

Движения за права женщин часто подчёркивают, что заработная плата женщин систематически ниже заработной платы мужчин, причём даже в странах Западной Европы и Северной Америки. При этом, нередко данный вывод делается на основе сравнения средней заработной платы всех работающих женщин со средней заработной платой всех работающих мужчин. Действительно, на основе данного сравнения средняя заработная плата женщин оказывается значительно ниже заработной платы мужчин на протяжении всего срока наблюдений. Из этого делается вывод о гендерной дискриминации женщин, т.е. женщинам платят меньше, потому что они женщины. Корректна ли такая интерпретация на основе сравнения средних? Почему? Какую модель вы бы построили для более точной оценки гендерной дискриминации? Опишите и обоснуйте ее параметры.

Вопрос 13

Балл: 29,00

Исследователи решили измерить степень предприимчивости наёмных работников, т.е. ситуацию, когда наёмные работники активно продают себя на рынке труда, демонстрируя качества предпринимателей. Для измерения они сформулировали ряд суждений, с которыми респондент мог согласиться или не согласиться, оценив степень согласия по 5-балльной шкале (1 – полностью не согласен, 5 – полностью согласен). По предположению, предприимчивый наёмный работник должен соглашаться с одними суждениями и не соглашаться с другими (в таблице после этих суждений стоит знак минус). В итоге, планировалось сделать по данным вопросам сводный индекс, выражающий степень предприимчивости.

Для оценки согласованности суждений, исследователи провели пилотаж анкеты, опросив 20 респондентов. Результаты опроса 5 из них представлены в таблице. Что нужно сделать, чтобы оценить качество суждений? Какие выводы можно сделать по данным таблицы?

Суждение	респ.1	респ.2	респ.3	респ.4	респ.5
Я не сомневаюсь, что могу самостоятельно справиться с непредвиденными обстоятельствами	5	2	5	3	4
Если кто-то не согласен с моими идеями или вариантами решения проблем, я предпочитаю пойти на уступки и договориться (-)	3	4	4	2	4
Мне важно иметь возможность выбирать время и место для работы, без принудительной привязки к графику или офису	5	5	4	4	5
Выбирая, чем заняться, я всегда оцениваю, насколько это может быть полезным для меня в будущем	4	5	4	4	5
Креативность и умение презентовать себя – важнейшие факторы карьерного роста	4	4	5	4	5
Для меня нормально выполнять рабочие задачи в нерабочие часы и выходные дни	4	5	3	4	3
Мне важно, чтобы работа каждый день бросала мне вызов	2	2	1	3	3
Конкуренция между коллегами – неэффективный способ организации совместной работы (-)	5	4	3	2	4
Я предпочитаю чёткие, ясные и стабильные рабочие задачи (-)	4	5	5	4	3

Вопрос 14

Балл: 14,00

Рассмотрим линейное однородное уравнение  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0,$$

где  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  - постоянные. Существует ли решение данного уравнения, по которому можно однозначно восстановить коэффициенты  $a_0, \dots, a_{n-1}$ ?

Вопрос 15

Балл: 14,00

Рассмотрим случайный процесс, описывающий систему, которая состоит из двух приборов обслуживания. В систему поступают заявки, в среднем 4 заявки в час, в соответствии с однородным процессом Пуассона, то есть, длины интервалов времени между последовательными заявками являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, причем распределенными по показательному закону. Алгоритм обслуживания следующий: если заявка поступает в систему, в которой оба прибора свободны, то заявка направляется на прибор с номером 1. Если прибор 1 занят, то заявка направляется на прибор с номером 2. Если оба прибора заняты, то заявка не входит в систему и теряется. После обслуживания любым прибором заявка выходит из системы.

Предполагается, что времена обслуживания заявок приборами - независимые случайные величины, распределенные по показательному закону со средними  $m_1=20$  минут для прибора 1 и  $m_2=1$  час для прибора 2 соответственно.

Предполагая, что все указанные случайные величины независимы, построить математическую модель системы обслуживания в виде марковского случайного процесса. В установившемся режиме вычислить вероятность того, что прибор 2 не занят, и вероятность того, что не занят прибор 1.

Вопрос 16

Балл: 10,00

Однородная марковская цепь (МЦ) имеет матрицу переходных вероятностей за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

- 1) Существует ли предельное распределение МЦ?
- 2) Найти множество стационарных распределений МЦ.

Вопрос 17

Балл: 10,00

В 24-разрядной арифметике вычисляется значение функции, которая на языке программирования Python может быть определена следующим образом.

```
def f(x, y, n):  
    if n == 0:  
        return x + 3  
    elif n == 1:  
        return (x - 1) * y  
    else:  
        return (2/3) * f(x, y, n-1) * y + (1/3) * f(x, y, n-2) * y**2  
  
f(10**24, 0.1, 100)/f(10**24, 0.1, 101)
```

Укажите, что выведет данная программа, и найдите наименьшее натуральное число  $n$ , при котором абсолютная погрешность вычисления функции  $f$  удовлетворяет неравенству

$$\Delta f(10^{24}, 0.1, n) \leq 10^{-2024},$$

Обоснуйте полученный ответ. Допустимую глубину рекурсии считать неограниченной. Считать, что при всех вычислениях целые числа не переполняются, а также пренебречь существованием машинного нуля, то есть считать, что машинный ноль  $X_0 \ll 10^{-2024}$

Вопрос 18

Балл: 10,00

## Прикладная математика

На  $M$  носителях памяти, размером по  $N$  байт каждый, записаны вещественные числа. Каждое число занимает 2 байта памяти. На компьютере имеется  $N$  байт свободной оперативной памяти. Одновременно к компьютеру может быть подключено не более 2-х носителей памяти.

Необходимо перераспределить числа на носителях таким образом, чтобы при объединении их в единый массив (путем конкатенации) последовательность чисел будет отсортированной по возрастанию.

Предложите эффективный по числу операций алгоритм и оцените его сложность.