Вопрос **Инфо**

Уважаемые участники!

Олимпиадное задание по направлению «Теория игр» состоит только из инвариантной части. Это означает, что вам нужно постараться решить все задачи и ответить на все вопросы, чтобы претендовать на призовые места.

Верим в ваш успех!

Инструкции от составителей заданий:

- Условие каждой задачи приведено на русском и английском языке. Решение может быть представлено как на русском, так и на английском языке. Никаких дополнительных баллов, впрочем, как и штрафов, за решение на английском языке не предусмотрено.
- Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк – распознаваемым. Ответы на качественные вопросы должны быть убедительно аргументированы, но длинные рассуждения, не относящиеся к сути дела, могут негативно повлиять на оценку.
- Все шаги в решении должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе.
- Если приведенное решение является неверным, перечеркните его (перечеркнутое решение не проверяется) и приведите корректную версию.
- При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, а апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.

Вопрос **1**

Балл: 15,00

Сообразим на троих (15 баллов)

Рассмотрим игру «Камень, ножницы, бумага» для трёх игроков со ставками по следующим правилам: каждый игрок перед розыгрышем ставит на кон по единице. Если все игроки выбросили разные фигуры (получилась, например, комбинация КНБ) или все одинаковые (например, комбинация БББ), то фиксируется ничья, и каждый игрок получает свою ставку назад. Если же игроки в совокупности выбросили ровно две различные фигуры, то фиксируются победители и побеждённые: так, если один игрок победил двух других (например, комбинация КНН), то он забирает весь банк себе, а если два игрока выиграли у третьего (например, комбинация ННБ), то банк делится между победителями поровну.

1. Какова стратегическая форма данной игры?

2. Пусть у вас есть возможность поучаствовать в этой игре за двух игроков сразу («с двух рук»). Каково математическое ожидание вашего выигрыша и ваши стратегии в равновесии в этом случае (даже если соперник знает, что вы играете с двух рук)?

3. Пусть теперь вы перед игрой можете сговориться со вторым игроком так, чтобы делить ваш выигрыш (и проигрыш!) пополам, однако во время игры вы не можете обмениваться какой–

либо информацией или использовать общий источник случайности, чтобы ничем друг друга не выдать. Каковы теперь ваши стратегии и математическое ожидание выигрыша?

Let's figure it out for three (15 points)

Let's consider the game "Rock, paper, scissors" for three players with bets according to the following rules: each player bets 1 before the play. If all the players have shown different hand signal (for example, a combination of RPS) or all the same (for example, a combination of RRR), then a draw is fixed, and each player gets his bet back. If the players have shown exactly two different signals among three, then the winners and losers are fixed: so, if one player defeated the other two (for example, a combination of RSS), then he takes the whole pot for himself, and if two players defeated the third (for example, a combination of SSP), then the pot is divided equally between the two winners.

1. What is the strategic form of this game?

2. Let you have the opportunity to participate in this game for two players simultaneously ("with two hands"). What are the expectation of your payoff and your strategies in equilibrium (even if your opponent will learn that you play with two hands)?

3. Now, before the game, you can collude with the second player in such a way as to divide your further winnings (and losses!) equally. However, during the game you cannot exchange any information or use a common device of randomness so as not to give each other away. What are your strategies and the expectation of the payoff now?

Вопрос 2

Балл: 20,00

Билет в МГИМО (20 баллов)

Представим себя на известной гуманитарной олимпиаде «Умники и умницы». В игре есть три дорожки: красная, жёлтая, зелёная. Участники 1, 2, 3 по очереди выбирают дорожку: участник 1 выбирает первым одну из трёх, 2 – одну из двух оставшихся, 3 получает последнюю. Потом участники становятся на эти дорожки и начинают отвечать на вопросы по очереди.

На красной дорожке для победы надо ответить на 2 вопроса без ошибок. На жёлтой дорожке для победы надо ответить на 2 вопроса из трёх без ошибок, и чтобы участник на красной не победил. На зелёной дорожке надо ответить на 2 вопроса из 4 без ошибок, и чтобы участники на красной и жёлтой не победили.

1. Пусть вероятность правильного ответа у всех одинакова и равна 1/2. Какую дорожку выберет 1 участник? Какую дорожку выберет 2 участник?

2. Пусть вероятности правильного ответа не одинаковые. Есть ли такие вероятности p_1, p_2, p_3, что при выборе в любом порядке (например, 123, 321 и т.д.), участники выбирают различные дорожки без конфликта, то есть исход каждый раз один и тот же?

Ticket to MGIMO (20 points)

Let's imagine ourselves at the famous humanitarian Olympiad "Smart and Smarties." Participants 1, 2, 3 in turn choose the track: player 1 chooses one of the three first, player 2 chooses one of the remaining two, player 3 gets the last one. Then the participants stand on these tracks and begin to answer questions in turn.

On the red track, to win, you must answer 2 questions out of two without errors. On the yellow track, to win, you must answer 2 questions out of three without errors, and also that the participant on the red does not win. On the green track, to win, you must answer 2 questions out of 4 without errors, and also that the participants on the red and yellow do not win.

1. Let the probability of the correct answer be the same for everyone and equal to 1/2. Which track will participant 1 choose? Which track will participant 2 choose?

2. Let the probabilities of the correct answer not be the same. Are there exist probabilities p_1, p_2, p_3 such that when choosing in any order (for example, 123, 321, etc.), participants choose different paths without conflict, that is, the outcome is the same every time?

Вопрос 3

Балл: 15,00

Числа (15 **баллов**)

Стёпа и Жора играют в игру с числами. Изначально на доске записано число 0. Есть три опции: «увеличить написанное на доске число на 34», «увеличить написанное на доске число на 43» и «удвоить написанное на доске число». Игроки по очереди используют одну из трех опций, меняя число на доске. Особенность игры заключается в том, что игрок не может использовать опцию, которую применил его соперник на предыдущем ходе. Выигрывает тот, кто первый получит на доске число, большее или равное M.

Пример игры для M=190.

На доске: 0.

Степа выбирает из опций «+34», «+43», «×2». Пусть Степа выбрал «+34».

На доске: 0+34=34

Жора выбирает из опций «+43», «×2» (опция «+34» заблокирована, так как ее на прошлом ходе использовал

Степа). Пусть Жора выбрал «+43».

На доске: 34+43=77

Степа выбирает из опций «+34» и «×2». Степа выбрал «×2».

На доске: 77× 2=154.

Жора выбирает из опций «+34» и «+43». Жора выбрал «+43».

На доске: 154+43 = 197 > 190. Жора выиграл!

Первый ход делает Степа. При каких M>0 у Жоры есть выигрышная стратегия?

The numbers. (15 points)

Styopa and Zhora are playing a game with numbers. Initially, the number 0 is written on the board. There are three options: "increase the number written on the board by 34," "increase the number written on the board by 43," and "double the number written on the board." Players take turns using one of three options, changing the number on the board. The peculiarity of the game is that the player cannot use the option that his opponent used on the previous move. The first one who get a number on the board greater than or equal to M wins.

Example of a game for M=190.

On the board: 0.

Stepa selects from the options "+34", "+43", "×2". Let Styopa choose "+34".

On the board: 0+34=34

Zhora chooses from the options "+43", "×2" (the option "+34" is blocked, since he used it on the last move Stepa). Let Zhora choose "+43".

On the board: 34+43=77

Stepa chooses from the options "+34" and "×2". Styopa chose "×2".

On the board: 77×2=154.

Zhora chooses from the options "+34" and "+43". Zhora chose "+43".

On the board: 154+43 = 197 > 190. Zhora wins!

Styopa makes the first move. For which M>0 does Zhora have a winning strategy?

Вопрос 4

Балл: 20,00

Навести марафет (20 баллов)

На рынке арендных квартир выставляются квартиры двух типов: в хорошем состоянии и с существенными недостатками. К сожалению, 80% квартир имеют недостатки, причем на первый взгляд их не обнаружить: все квартиры выглядят одинаково средне. Для того чтобы улучшить впечатление при просмотре, специально обученные люди придумали услугу хоумстейджинга – косметической подготовки квартиры (мелкая покраска, перестановка, замена текстиля, игра с освещением). Услуга совсем не дорогая – всего 25 тыс. рублей, причем если квартира в хорошем состоянии изначально, то хоумстейджинг может сделать собственник самостоятельно, даже получая дополнительное удовольствие от прихорашивания своей и без того прекрасной квартиры (оценим это удовольствие для простоты в 5 тыс). При этом после хоумстейджинга все квартиры также выглядят одинаково прекрасно.

Арендатор приходит на просмотр и решает, хочет ли он арендовать эту квартиру или нет. Если нет, то ни собственник, ни арендатор не получают никакой полезности. Если же захочет, то собственник получает сумму согласно договору (считайте что 500 тыс рублей за год), а арендатор возможность жить в квартире, что в зависимости от состояния квартиры может дать +1 для хорошей квартиры, либо -1 для плохой, независимо от наличия хоумстейджинга.

Какое поведение собственников и арендаторов будет наблюдаться на таком рынке в совершенном байесовом равновесии?

Put on a show (20 points)

There are two types of apartments on the rental apartment market: those in good condition and those with significant flaws. Unfortunately, 80% of apartments have flaws, and they cannot be detected at first glance: all apartments look equally average. In order to improve the viewing experience, specially trained people came up with a homestaging service, i.e. cosmetic preparation of an apartment (minor painting, rearrangement, replacement of textiles, playing with lighting). The service is not at all expensive – just 25 thousand rubles, and if the apartment is in good condition from the beginning, the owner can do homestaging on his own, even getting additional pleasure from sprucing up his already beautiful apartment (for simplicity, let’s estimate this pleasure at 5 thousand). Moreover, after homestaging, all apartments also look equally beautiful.

The tenant comes to view and decides whether he wants to rent this apartment or not. If not, then neither the owner nor the tenant receives any utility. If he wants, then the owner receives the amount according to the contract (consider that 500 thousand rubles per year), and the tenant has the opportunity to live in the apartment, which, depending on the condition of the apartment, can give +1 for a good apartment, or -1 for a bad one, regardless of availability home staging.

What behavior of owners and tenants would be observed in such a market in a perfect Bayesian equilibrium?

Вопрос 5

Балл: 15,00

Лучший из миров (15 баллов)

Рассмотрим агентов A, B, C и возможные миры, обозначенные натуральными числами: 1, 2, . . . , 12.

Агент A не различает миры внутри множеств: A1 = {1, 2, 3}, A2 = {4, 5, 6}, A3 = {7, 8, 9}, A4 = {10, 11, 12}.

Агент B не различает миры внутри множеств: B1 = {2, 5, 9}, B2 = {1, 6, 12}, B3 = {3, 4, 11}, B4 = {7, 8, 10}.

Агент C не различает миры внутри множеств: C1 = {5, 9, 12}, C2 = {1, 7, 6}, C3 = {4, 3, 11}, C4 = {2, 8, 10}.

Структура классов эквивалентности всем известна.

Загадан мир 1. Агенты A, B и C знают класс эквивалентности, куда этот мир попадает. Агенты A и B могут публичным объявлением удалять миры, которые считают невозможными в любом порядке, выбранном ими.

Задача A и B узнать какой мир загадан, при этом C не должен отгадать этот мир.

Могут ли A и B выиграть? Если да, то постройте выигрышную последовательность сообщений. Если нет, то объясните почему.

Best of all worlds (15 points)

Consider agents A, B, C and possible worlds denoted by natural numbers: 1, 2, . . . , 12.

Agent A does not distinguish among worlds within sets: A1 = {1, 2, 3}, A2 = {4, 5, 6}, A3 = {7, 8, 9}, A4 = {10, 11, 12}.

Agent B does not distinguish among worlds within sets: B1 = {2, 5, 9}, B2 = {1, 6, 12}, B3 = {3, 4, 11}, B4 = {7, 8, 10}.

Agent C does not distinguish among worlds within sets: C1 = {5, 9, 12}, C2 = {1, 7, 6}, C3 = {4, 3, 11}, C4 = {2, 8, 10}.

The structure of equivalence classes is known to everyone.

World 1 is realized. Agents A, B and C learn the equivalence class where this world is contained. Agents A and B can publicly announce and remove the worlds they seem impossible in any order they choose.

The task of A and B is to find out which world is actual, while C does not guess this world.

Question: Can A and B win? If yes, then construct a winning sequence of announcements. If not, then explain why.

При прикреплении файлов напечатайте / скопируйте и вставьте в поле ответов фразу «Выполненное задание в прикреплённом документе» или укажите место в тексте ответа, к которому относится файл (например, «см. график на прикреплённом листе 1»)

Вопрос 6

Балл: 15,00

Размышления о Римской Империи (15 баллов)

Латинским квадратом размера N×N называется матрица размера N×N, заполненная натуральными числами от 1 до N таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце каждое число встречается ровно один раз.

Моряки Амадеус и Бонифациус нашли сундук, в котором хранится N+1 одинаковых жемчужин. Они стали спорить, кто из них внес больший вклад в поиск сокровищ и достоин получить большее количество жемчужин. Моряки пошли к императору, чтобы тот решил их спор.

Император нарисовал латинский квадрат размера N×N, который заполнен числами от 1 до N. Моряки знают какой квадрат нарисовал император. Каждый из моряков тайно записывает число от 1 до N. В латинском квадрате выбирается строка с номером, который записал на папирусе Амадеус, и столбец с номером, который записал Бонифациус. В ячейке на пересечении выбранных моряками строки и столбцов число K: Амадеус получает K жемчужин, Бонифациус остальные N+1-K жемчужин.

Верно ли, что шансы моряков на успех одинаковы, независимо от того, какой латинский квадрат нарисует император? Обоснуйте свой ответ.

Reflections on the Roman Empire (15 points)

An N×N Latin square is an N×N matrix filled with natural numbers from 1 to N in such a way that each number appears exactly once in each row and each column.

The sailors Amadeus and Bonifacius found a chest containing N+1 identical pearls. They began to argue which of them made a greater contribution to the search for treasures and deserves to receive more pearls. The sailors went to the emperor to resolve their dispute.

The emperor drew a Latin square of size N×N, which is filled with numbers from 1 to N. The sailors know which square the emperor drew. Each of the sailors secretly writes down a number from 1 to N. In the Latin square, a row is selected with the number that Amadeus wrote down on the papyrus, and a column with the number that Bonifacius wrote down. The number K in the cell at the intersection of the rows and columns chosen by the sailors means that Amadeus receives K pearls, Bonifacius receives the remaining N+1-K pearls.

Is it true that the sailors' chances of success are the same, regardless of which Latin square the emperor draws? Justify your answer.