Критерии оценивания заданий заключительного этапа
по направлению «Теория игр»

Задания по направлению состояли только из инвариантной части. Для того, чтобы претендовать на статусы медалиста, дипломанта I, II, III степени, участникам необходимо набрать наибольшее число баллов за все задания.

Номер задания	Максимальный балл	Учёт в рейтинге по направлению
1	15	✓
2	20	✓
3	15	✓
4	20	✓
5	15	✓
6	15	✓

Ниже в документе представлены условия, решения и критерии оценивания каждой из задач.

Профиль: «Теория игр» **КОД - 290**

Памяти Андрея Бремзена

Время выполнения задания – 180 мин., язык – русский или английский.

Решите все задачи. Веса задач, в том числе каждого подвопроса, приведены в скобках.

Инструкции.

- Решение может быть представлено как на русском, так и на английском языке. Никаких дополнительных баллов, впрочем, как и штрафов, за решение на английском языке не предусмотрено.
- Решение должно быть хорошо структурированным, изложено грамотным языком, а почерк — распознаваемым. Ответы на качественные вопросы должны быть убедительно аргументированы, но длинные рассуждения, не относящиеся к сути дела, могут негативно повлиять на оценку.
- Все шаги в решении должны быть обоснованы, все вычисления должны присутствовать в работе. Калькуляторами пользоваться запрещено.
- Черновики не предусмотрены, решение сразу оформляется на чистовик.
- Если приведенное решение является неверным, перечеркните его (перечеркнутое решение не проверяется) и приведите корректную версию.
- При наличии нескольких вариантов решения одного и того же задания, проверяющий сам определяет, какое из решений подлежит проверке, а апелляции с просьбой проверить другой вариант решения не принимаются.

Удачи!

Задача 1. Сообразим на троих (15 баллов)

Рассмотрим игру «Камень, ножницы, бумага» для трёх игроков со ставками по следующим правилам: каждый игрок перед розыгрышем ставит на кон по единице. Если все игроки выбросили разные фигуры (получилась, например, комбинация КНБ) или все одинаковые (например, комбинация БББ), то фиксируется ничья, и каждый игрок получает свою ставку назад. Если же игроки в совокупности выбросили ровно две различные фигуры, то фиксируются победители и побеждённые: так, если один игрок победил двух других (например, комбинация КНН), то он забирает весь банк себе, а если два игрока выиграли у третьего (например, комбинация ННБ), то банк делится между победителями поровну.

1. Какова стратегическая форма данной игры?

2. Пусть у вас есть возможность поучаствовать в этой игре за двух игроков сразу («с двух рук»). Каково математическое ожидание вашего выигрыша и ваши стратегии в равновесии в этом случае (даже если соперник знает, что вы играете с двух рук)?

3. Пусть теперь вы перед игрой можете сговориться со вторым игроком так, чтобы делить ваш выигрыш (и проигрыш!) пополам, однако во время игры вы не можете обмениваться какой-либо информацией или использовать общий источник случайности, чтобы ничем друг друга не выдать. Каковы теперь ваши стратегии и математическое ожидание выигрыша?

Let’s figure it out for three (15 points)

Let’s consider the game "Rock, paper, scissors"for three players with bets according to the following rules: each player bets 1 before the play. If all the players have shown different hand signal (for example, a combination of RPS) or all the same (for example, a combination of RRR), then a draw is fixed, and each player gets his bet back. If the players have shown exactly two different signals among three, then the winners and losers are fixed: so, if one player defeated the other two (for example, a combination of RSS), then he takes the whole pot for himself, and if two players defeated the third (for example, a combination of SSP), then the pot is divided equally between the two winners.

1. What is the strategic form of this game?

2. Let you have the opportunity to participate in this game for two players simultaneously ("with two hands"). What are the expectation of your payoff and your strategies in equilibrium (even if your opponent will learn that you play with two hands)?

3. Now, before the game, you can collude with the second player in such a way as to divide your further winnings (and losses!) equally. However, during the game you cannot exchange any information or use a common device of randomness so as not to give each other away. What are your strategies and the expectation of the payoff now?

Решение.

Ниже предсталено краткое решение задачи, с полным решением можно ознакомиться по ссылке.

1. Матрица выигрышей для данной игры будет трёхмерной, размерности $3 \times 3 \times 3$. Её можно выписать на бумаге по слоям, последовательно фиксируя стратегию одного из игроков (например, третьего):

$s_3 = $ К

1\2	К	Н	Б
К	0,0,0	$\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}$	$-1,2,-1$
Н	$-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$-1,-1,2$	0,0,0
Б	$2,-1,-1$	0,0,0	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$

$s_3 = $ Н

1\2	К	Н	Б
К	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$	$2,-1,-1$	0,0,0
Н	$-1,2,-1$	0,0,0	$\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}$
Б	0,0,0	$-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$-1,-1,2$

$s_3 = $ Б

1\2	К	Н	Б
К	$-1,-1,2$	0,0,0	$-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
Н	0,0,0	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$	$2,-1,-1$
Б	$\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}$	$-1,2,-1$	0,0,0

Поскольку теперь два из трёх игроков действуют во всех смыслах как один, мы можем записать стратегическую форму модифицированной игры, которая по сути имеет место:

2.

		$[rr]$	$[rs]$	$[rp]$	$[ss]$	$[sp]$	$[pp]$
	1\2	КК	КН	КБ	НН	НБ	ББ
$[R]$	К	0,0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$-1,1$	$2,-2$	0,0	$-1,1$
$[S]$	Н	$-1,1$	$-1,1$	0,0	0,0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$2,-2$
$[P]$	Б	$2,-2$	0,0	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$-1,1$	$-1,1$	0,0

Легко проверить, что эта модифицированная игра не имеет равновесий в чистых стратегиях, поэтому будем искать смешанные равновесия. Пользуясь первыми буквами английских названий фигур (R = rock = камень, S = scissors = ножницы, P = paper = бумага) для удобства интерпретации, обозначим заглавными латинскими буквами R, S и P вероятности фигур для первого, «однорукого» игрока, а для второго, «двурукого» игрока вероятности пар фигур обозначим **двухбуквенными** строчными переменными, соответственно, rr, rs, rp, ss, sp и pp.

Запишем выигрыш «однорукого игрока».

$$\begin{aligned} U = \max_{R+S+P=1; R,S,P\geq 0} \{ & 0{,}5rs \cdot R - rp \cdot R + 2ss \cdot R - pp \cdot R \\ & - rr \cdot S - rs \cdot S + 0{,}5sp \cdot S + 2pp \cdot S \\ & + 2rr \cdot P + 0{,}5rp \cdot P - ss \cdot P - sp \cdot P \} = \\ & = \max\{C_1, C_2, C_3\} \end{aligned}$$

i. Пусть $C_1 > \max\{C_2, C_3\}$, тогда $R = 1 \Rightarrow rp + pp = 1 \Rightarrow C_1 = -1 < C_2 = 2(1 - rp) \Rightarrow$ противоречие, равновесий нет. По аналогии можно показать, что для $C_2 > \max\{C_1, C_3\}$ и $C_3 > \max\{C_1, C_2\}$ равновесий нет.

ii. Пусть $C_1 = C_2 > C_3$, тогда $P = 0$ (если R или S также равно 0, то равновесий нет) $\Rightarrow rr + rp = 1 \Rightarrow C_1 = -rp < C_3 = 2rr + 0{,}5rp$. Равновесий нет, по аналогии можно показать для двух других случаев.

iii. Получается, что равновеси достигается только при $C_1 = C_2 = C_3$, $R + S + P = 1$, $R,S,P > 0$ (если хотя бы одна вероятность равно 0, то получаем контрпример из пункта ii.).

Запишем выигрыш «двурукого игрока»

$$\begin{aligned} \mathbb{E}U = & (0R + 1S - 2P)rr + (-0.5R + 1S - 0P)rs + \\ & + (1R + 0S - 0.5P)rp + (-2R + 0S - 1P)ss + \\ & + (0R - 0.5S - 1P)sp + (1R - 2S + 0P)pp \end{aligned}$$

Заметим, что если хотя бы одна из вероятностей R, S, P не равна 1/3, то равновесие не будет достигнуто. Тогда

$$\mathbb{E}U = -1/3rr + 1/6rs - 1/3rp + 1/6ss - 1/3sp + 1/6pp$$

Тогда $rr = rp = sp = 0$. Зная, что $C_1 = C_2 = C_3$, получаем, что в равновесии $rs = ss = pp = 1/3$. А «двурукий игрок» получает ожидаемый выигрыш в размере 1/6.

3. Можно снова выписать модифицированную игру. На этот раз она будет выглядеть так:

$s_3 = $ К

1╲2	К	Н	Б
К	$0,0,0$	$-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$
Н	$-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$	$-1, -1,2$	$0,0,0$
Б	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$	$0,0,0$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$

$s_3 = $ Н

1╲2	К	Н	Б
К	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$	$0,0,0$
Н	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$	$0,0,0$	$-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$
Б	$0,0,0$	$-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$	$-1, -1,2$

$s_3 = $ Б

1╲2	К	Н	Б
К	$-1, -1,2$	$0,0,0$	$-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$
Н	$0,0,0$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$
Б	$-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$	$0,0,0$

Далее можно рассуждать отчасти аналогично предыдущему разделу задачи. Обозначим за R,S,r,s, ρ, σ вероятностьсти, с которыми играют камень и ножницы игроки 1, 2 (сговаривающиеся) и 3 соответственно. Во-первых, можно сразу исключить из рассмотрения чистые стратегии (это можно понять и по выписанной вначале стратегической форме модифицированной игры). Стало быть, рассматриваем только перечисленные выше три отрезка для трёх случаев безразличия третьего игрока. Во-вторых, исключаем и все точки данных отрезков, для которых у третьего игрока есть только два чистых наилучших ответа: если третий игрок никогда не выбрасывает, например, камень, то и первому, и второму игроку бессмысленно выбрасывать бумагу, поскольку бумага в этом случае может выиграть только против подельника по сговору, что не даёт никакой дополнительной прибыли (ведь суммарный выигрыш всегда делится поровну) — а таким стратегиям соответствуют только точки на границах треугольника, которые мы уже исключили из анализа. Остаётся единственная точка: $(R + r, S + s) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Таким образом, мы выяснили, что $R + r = S + s = \frac{2}{3}$ и что третий игрок должен играть все три свои стратегии с положительными весами. Осталось выяснить в точности все эти веса.

Без потери общности рассмотрим первого игрока (первый и второй игроки симметричны). Во-первых, из условия $R + r = S + s = \frac{2}{3}$ нетрудно понять, что первый игрок не может играть чистую стратегию, он должен рандомизировать между хотя бы двумя фигурами; в противном случае у второго игрока на две из трёх фигур приходился бы вес $\frac{4}{3} > 1$, что невозможно. (То же верно и для второго игрока: он тоже должен играть смешанную стратегию.) Во-вторых, условия строго попарного безразличия можно сразу отмести!

Причина следующая: пусть для первого игрока Н $\sim$ Б $\succ$ К (остальные два случая рассматриваются аналогично). Это означает, что для любого наилучшего ответа $R = 0$. Значит, $r = \frac{2}{3}$. Но отсюда с неизбежностью следует, что для второго игрока то же самое условие Н $\sim$ Б $\succ$ К должно *не* выполняться! В частности, должны одновременно выполняться (из-за первого игрока) и не выполняться (из-за второго игрока) одни и те же условия на ρ и σ, что невозможно. Таким образом, и для первого, и для второго игрока обязательно трёхстороннее безразличие К $\sim$ Н $\sim$ Б.

Мы получим обычное равновесие, как в игре без сговора! Нетрудно подсчитать, что матожидание выигрыша как первых двух игроков, так и третьего игрока, окажется *нулевым.*

Здесь точно так же, как в пункте 2, можно было бы выдвинуть рассуждение о том, что с точки зрения третьего игрока модифицированная игра ничем не отличается от обычного варианта игры, поэтому и минимаксной (а также равновесной) стратегией третьего всё так же будет $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, а отсюда перейти к поиску наилучшего ответа первого и второго игроков на эту стратегию.

Критерии.

1. 3 балла
   - 1 балл за описание игроков, выигрышей, указание типа игры;
   - 2 балла за записанные выигрыши в соотвествии с исходами (матрицу игры).
2. 6 баллов
   - 1 балл за запись матрицы;
   - 1 балл за поиск равновесия в чистых стратегиях;

– по 2 балла за рассмотрение каждого из игроков.

За неполное решение может быть поставлен частичный балл.

3. 6 баллов

– 1 балл за запись матрицы;

– 1 балл за поиск равновесия в чистых стратегиях;

– по 2 балла за рассмотрение каждого из игроков.

За неполное решение может быть поставлен частичный балл.

Задача 2. Билет в МГИМО (20 баллов)

Представим себя на известной гуманитарной олимпиаде «Умники и умницы». В игре есть три дорожки: красная, жёлтая, зелёная. Участники 1,2,3 по очереди выбирают дорожку: участник 1 выбирает первым одну из трёх, 2 – одну из двух оставшихся, 3 получает последнюю. Потом участники становятся на эти дорожки и начинают отвечать на вопросы по очереди.

На красной дорожке для победы надо ответить на 2 вопроса без ошибок. На жёлтой дорожке для победы надо ответить на 2 вопроса из трёх без ошибок, и чтобы участник на красной не победил. На зелёной дорожке надо ответить на 2 вопроса из 4 без ошибок, и чтобы участники на красной и жёлтой не победили.

1. Пусть вероятность правильного ответа у всех одинакова и равна $1/2$. Какую дорожку выберет 1 участник? Какую дорожку выберет 2 участник?

2. Пусть вероятности правильного ответа не одинаковые. Есть ли такие вероятности p1, p2, p3, что при выборе в любом порядке (например, 123, 321 и т.д.), участники выбирают различные дорожки без конфликта, то есть исход каждый раз один и тот же?

Ticket to MGIMO (20 points)

Let's imagine ourselves at the famous humanitarian Olympiad "Smart and Smarties." Participants 1,2,3 in turn choose the track: player 1 chooses one of the three first, player 2 chooses one of the remaining two, player 3 gets the last one. Then the participants stand on these tracks and begin to answer questions in turn.

On the red track, to win, you must answer 2 questions out of two without errors. On the yellow track, to win, you must answer 2 questions out of three without errors, and also that the participant on the red does not win. On the green track, to win, you must answer 2 questions out of 4 without errors, and also that the participants on the red and yellow do not win.

1. Let the probability of the correct answer be the same for everyone and equal to $1/2$. Which track will participant 1 choose? Which track will participant 2 choose?

2. Let the probabilities of the correct answer not be the same. Are there exist probabilities p1, p2, p3 such that when choosing in any order (for example, 123, 321, etc.), participants choose different paths without conflict, that is, the outcome is the same every time?

Решение.

1. Запишем вероятности победы для красной, жёлтой и зелёной дорожек:

$$p_r^{win} = p_r^2,$$

$$p_y^{win} = (1-p_r^2)(p_y^3 + 3(1-p_y)p_y^2),$$

$$p_g^{win} = \left(1 - p_r^2 - (1-p_r^2)(p_y^2 + 2(1-p_y)p_y^2)\right)(p_g^4 + 4(1-p_g)p_g^3 + 6(1-p_g)^2p_g^2),$$

где p_r,p_y,p_g обозначают вероятность правильного ответа для игрока, выбравшего данную дорожку. При рассчете данной вероятности важно учесть, что победа на красной и на желтой дорожке не являются независимыми событиями

В этом случае игроки одинаковы, поэтому достаточно подставить $p_r = p_y = p_g = 1/2$. Получаем, что выше других вероятность победить на жёлтой дорожке.

2. По этим же формулам можно проверить, что, например, при значениях $p_1 = 2/3$, $p_2 = 1/2$, $p_3 = 0$ (или ϵ) получаем искомое поведение: игрок 1 выбирает красную дорожку, игрок 2 выбирает жёлтую, игрок 3 безразличен и (для простоты) выбирает зелёную.

Критерии. Вопрос 1. (10 баллов максимум)

- верный рассчет вероятности победить на красной дорожке - 2 балла
- верный рассчет вероятности победить на желтой дорожке - 3 балла
- верный рассчет вероятности победить на зеленой дорожке - 2 балла
- верная общая логика решения - 2 балла

Вопрос 2. (10 баллов максимум)

- верный вывод вероятностей для красной и желтой дорожек в общем случае - 2 балла
- верный вывод вероятностей для зеленой дорожки в общем случае - 3 балла
- верная общая логика решения - 2 балла
- доказательство того, что вероятности существуют- 3 балла

Задача 3. Числа (15 баллов)

Стёпа и Жора играют в игру с числами. Изначально на доске записано число 0. Есть три опции: «увеличить написанное на доске число на 34», «увеличить написанное на доске число на 43» и «удвоить написанное на доске число». Игроки по очереди используют одну из трех опций, меняя число на доске. Особенность игры заключается в том, что игрок не может использовать опцию, которую применил его соперник на предыдущем ходе. Выигрывает тот, кто первый получит на доске число, большее или равное M.

Пример игры для M=190. На доске: 0. Степа выбирает из опций «+34», «+43», «×2». Пусть Степа выбрал «+34». На доске: 0+34=34 Жора выбирает из опций «+43», «×2» (опция «+34» заблокирована, так как ее на прошлом ходе использовал Степа). Пусть Жора выбрал «+43». На доске: 34+43=77 Степа выбирает из опций «+34» и «×2». Степа выбрал «×2». На доске: $77 \cdot 2 = 154$. Жора выбирает из опций «+34» и «+43». Жора выбрал «+43». На доске: $154+43 = 197 > 190$. Жора выиграл!

Первый ход делает Степа. При каких M>0 у Жоры есть выигрышная стратегия?

Numbers. (15 points)

Styopa and Zhora are playing a game with numbers. Initially, the number 0 is written on the board. There are three options: “increase the number written on the board by 34,” “increase the number written on the board by 43,” and “double the number written on the board.” Players take turns using one of three options, changing the number on the board. The peculiarity of the game is that the player cannot use the option that his opponent used on the previous move. The first one who get a number on the board greater than or equal to M wins.

Example of a game for M=190.

On the board: 0.

Stepa selects from the options “+34”, “+43”, “×2”. Let Styopa choose “+34”. On the board: 0+34=34

Zhora chooses from the options “+43”, “×2” (the option “+34” is blocked, since he used it on the last move Stepa). Let Zhora choose “+43”. On the board: 34+43=77

Stepa chooses from the options “+34” and “×2”. Styopa chose “×2”. On the board: 77· 2=154.

Zhora chooses from the options “+34” and “+43”. Zhora chose “+43”. On the board: 154+43 = 197 > 190. Zhora wins!

Styopa makes the first move. For which M>0 does Zhora have a winning strategy?

Решение.

Ответ: ни при каких M

Доказательство:

Предположим, что у Жоры при некотором M есть выигрышная стратегия. Это значит, что ходы "+34"и "+43"при нуле на доске проигрывают за первого игрока. Но тогда Степа делает ход "2". $02 = 0$. На доске по-прежнему 0, но теперь первый ход делает Жора, а в этой ситуации он проигрывает (ход "2"уже не доступен по правилам, а как следует из предпосылки о существовании выигрышной стратегии Жоры, ходы "+34"и "+43"ведут к поражению при 0 на доске). Значит ход "2"приводит Стёпу к победе, противоречие!

Получается, у Степы при любых M найдется выигрышная стратегия. Любопытно, что для решения этой задачи нам не потребовалось искать выигрышную стратегию Степы в явном виде.

Критерии.

2 балла – за правильное дерево игры с исходами для частных случаев (обычно участники строили игру на 2-3 хода) или вычисление исходов без составления дерева.

До 5 баллов – за правильное решение игры в частных случаях (в зависимости от сложности рассмотренных игр).

Плюс 2 балла, если участник заметил, что ход Степы "x2"в самом начале дает такую же подыгру, как и остальная часть дерева (что и следовало бы развить в правильное решение), но не догадался это использовать.

Задача 4. Навести марафет (20 баллов)

На рынке арендных квартир выставляются квартиры двух типов: в хорошем состоянии и с существенными недостатками. К сожалению, 80% квартир имеют недостатки, причем на первый взгляд их не обнаружить: все квартиры выглядят одинаково средне. Для того чтобы улучшить впечатление при просмотре, специально обученные люди придумали услугу хоумстейджинга — косметической подготовки квартиры (мелкая покраска, перестановка, замена текстиля, игра с освещением). Услуга совсем не дорогая — всего 25 тыс. рублей, причем если квартира в хорошем состоянии изначально, то хоумстейджинг может сделать собственник самостоятельно, даже получая дополнительное удовольствие от прихорашивания своей и без того прекрасной квартиры (оценим это удовольствие для простоты в 5 тыс). При этом после хоумстейджинга все квартиры также выглядят одинаково прекрасно.

Арендатор приходит на просмотр и решает, хочет ли он арендовать эту квартиру или нет. Если нет, то ни собственник, ни арендатор не получают никакой полезности. Если же захочет, то собственник получает сумму согласно договору (считайте что 500 тыс рублей за год), а арендатор возможность жить в квартире, что в зависимости от состояния квартиры может дать +1 для хорошей квартиры, либо -1 для плохой, независимо от наличия хоумстейджинга.

Какое поведение собственников и арендаторов будет наблюдаться на таком рынке в совершенном байесовом равновесии?

Put on a show (20 points)

There are two types of apartments on the rental apartment market: those in good condition and those with significant flaws. Unfortunately, 80% of apartments have flaws, and they cannot be detected at first glance: all apartments look equally average. In order to improve the viewing experience, specially trained people came up with a home staging service — cosmetic preparation of an apartment (minor painting, rearrangement, replacement of textiles, playing with lighting). The service is not at all expensive — just 25 thousand rubles, and if the apartment is in good condition from the beginning, the owner can do home staging on his own, even getting additional pleasure from sprucing up his already beautiful apartment (for simplicity, let's estimate this pleasure at 5 thousand). Moreover, after home staging, all apartments also look equally beautiful.

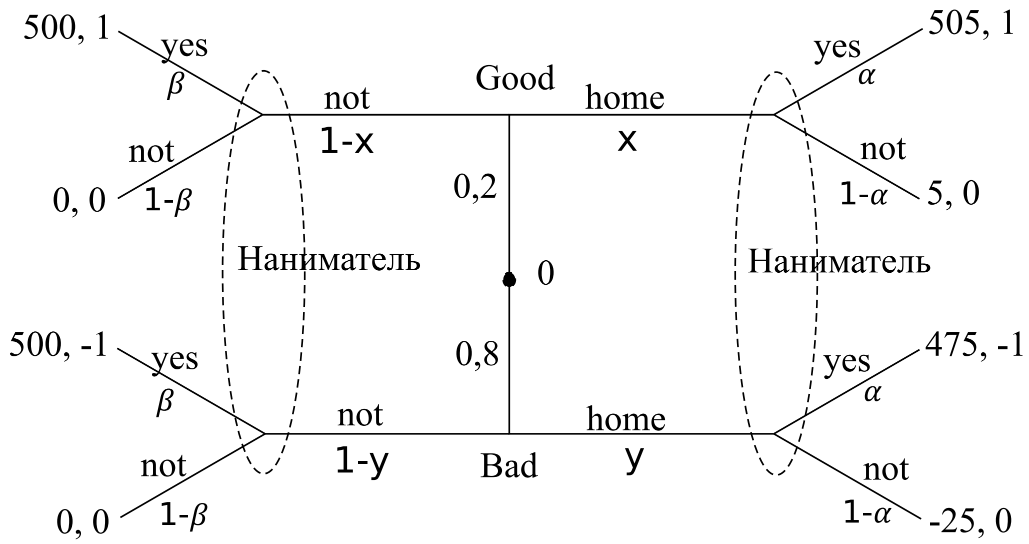
The tenant comes to view and decides whether he wants to rent this apartment or not. If not, then neither the owner nor the tenant receives any utility. If he wants, then the owner receives the amount according to the contract (consider that 500 thousand rubles per year), and the tenant has the opportunity to live in the apartment, which, depending on the condition of the apartment, can give +1 for a good apartment, or -1 for a bad one, regardless of availability home staging.

What behavior of owners and tenants would be observed in such a market in a perfect Bayesian equilibrium?

Решение.

Решение.

Представим ситуацию как сигнальную игру в развернутой форме, где игрок 1 – это собственних, игрок 2 – наниматель. Будем использовать стандартную терминологию для стратегий m (message) для игрока 1 и a (answer) для игрока 2. Веры обозначены на схеме.



Рассмотрим сначала возможные разделяющие равновесия.

1) Предположим, что $m(good) = home$, $m(bad) = not$. Тогда согласованные веры $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$. Тогда рациональный ответ $a(home) = yes$, $a(not) = not$. Это не равновесие, т.к. игрок 1 типа bad захочет отклониться и провести хоумстейджинг (мимикрирует под зорошего).

2) Предположим, что $m(good) = not$, $m(bad) = home$. Тогда согласованные веры $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$. Тогда рациональный ответ $a(home) = not$, $a(not) = yes$. Это не равновесие, т.к. игрок 1 типа bad захочет отклониться и не проводить хоумстейджинг (мимикрирует под хорошего).

Рассмотрим теперь гипотетические смешивающие равновесия.

3) Пусть $m(good) = m(bad) = home$. Тогда $\mu_2 = 0{,}2$, про μ_1 ничего сказать нельзя. Тогда $a(home) = not$. Тогда, что бы ни происходило в левом информационном множестве, игрок 1 типа bad предпочтет отклониться.

4) Пусть $m(good) = m(bad) = not$. Тогда $\mu_1 = 0{,}2$, про μ_2 ничего сказать нельзя. Тогда $a(not) = not$. Тогда, что бы ни происходило в правом информационном множестве, игрок 1 типа good предпочтет отклониться (раз хоумстейджинг приносит удовольствие, то почему бы им заняться, даже если сразу не сдашь квартиру).

Значит, в игре будут существовать гибридные равновесия, в которых игроки могут использовать смешанные стратегии. Введем обозначения для весов:

$$\sigma_1^{good} = x \cdot home + (1-x) \cdot not.$$

$$\sigma_1^{bad} = y \cdot home + (1-y) \cdot not.$$

$$\sigma_2(home) = \alpha \cdot yes + (1-\alpha) \cdot not.$$

$$\sigma_2(not) = \beta \cdot yes + (1-\beta) \cdot not.$$

Бывает ли равновесие, когда оба типа игрока 1 смешивают? Это возможно только когда их ожидаемые полезности от чистых стратегий равны.

$$505\alpha + 5(1-\alpha) = 500\beta + 0$$

$$475\alpha - 25(1-\alpha) = 500\beta + 0$$

Правые части равны, а левые очевидно нет (в первом равенстве больше при $\alpha \in (0;1)$). Значит, один тип игрока 1 должен использовать чистую стратегию, а второй смешанную. Возможны 4 варианта:

a) Пусть $m(good) = not$, а тип bad смешивает. Тогда $\mu_2 = 0$, $a(home) = not$. Но тогда тип bad захочет отклониться в not.

b) Пусть $m(good) = home$, а тип bad смешивает. Тогда $\mu_1 = 0$, $a(not) = not$, $\beta = 0$ Типу bad, чтобы смешивать, должно быть всё равно, т.е. должно выполняться

$$475\alpha - 25(1-\alpha) = 0$$

$$\alpha = 1/20$$

В свою очередь, чтобы наниматель в правом информационном множестве смешивал, у него тоже должны быть равные ожидаемые полезности от чистых стратегий, т.е.

$$0{,}2 \cdot 1 \cdot 1 + 0{,}7 \cdot y \cdot (-1) = 0$$

$$y = 1/4$$

Получили равновесие, в котором собственник хорошей квартиры всегда проводит хоумстейджинг, а собственник плохой с вероятностью $1/4$, а наниматель никогда не арендует квартиры без хоумстейджинга, а с хоумстейджингом – с вероятностью $1/20$.

c, d) В двух других случаях, когда чистую стратегию использует тип bad, равновесия тоже нет, в них типу good всегда выгодно отклониться в противоположную к bad стратегию.

Критерии.

3 балла – за правильное дерево игры с полезностями

1 балл – за каждое исключенное разделяющее равновесие

2 балла – за каждое исключенное смешивающее равновесие

3 балла – за исключение гибридного, в котором все смешивают

1 балл – за каждый из 3-х случай исключения полуразделяющего неравновесия

5 баллов – за единственное полуразделющее равновесие со всеми подсчитанными вероятностями

Дополнение: за одновременную игру и аллюзию на рынок лимонов ставилось 2 балла (иногда плюс несколько баллов при наличии еще разумных мыслей).

Дополнение 2: утверждение, что хороший собственник всегда делает хоумстейджинг (доминирование), вообще говоря не верно, т.к. зависит от реакции арендатора (может быть ситуация, где 500>5). Баллы за это беспощадно снимались, т.к. задача тогда сильно облегчалась и часть равновесий участники обоснованно не исключали.

Задача 5. Лучший из миров (15 баллов)

Рассмотрим агентов A, B, C и возможные миры, обозначенные натуральными числами: 1, 2, . . . , 12.

Агент A не различает миры внутри множеств: A1 = {1, 2, 3}, A2 = {4, 5, 6}, A3 = {7, 8, 9}, A4 = {10, 11, 12}.

Агент B не различает миры внутри множеств: B1 = {2, 5, 9}, B2 = {1, 6, 12}, B3 = {3, 4, 11}, B4 = {7, 8, 10}.

Агент C не различает миры внутри множеств: C1 = {5, 9, 12}, C2 = {1, 7, 6}, C3 = {4, 3, 11}, C4 = {2, 8, 10}.

Структура классов эквивалентности всем известна.

Загадан мир 1. A, B и C знают класс эквивалентности, куда этот мир попадает. Агенты A и B могут публичным объявлением удалять миры, которые считают невозможными в любом порядке, выбранном ими.

Задача A и B узнать какой мир загадан, при этом C не должен отгадать этот мир. Могут ли A и B выиграть? Если да, то постройте выигрышную последовательность сообщений. Если нет, то объясните почему.

Best of all worlds (15 points)

Consider agents A, B, C and possible worlds denoted by natural numbers: 1, 2, . . . , 12.

Agent A does not distinguish among worlds within sets: A1 = {1, 2, 3}, A2 = {4, 5, 6}, A3 = {7, 8, 9}, A4 = {10, 11, 12}.

Agent B does not distinguish among worlds within sets: B1 = {2, 5, 9}, B2 = {1, 6, 12}, B3 = {3, 4, 11}, B4 = {7, 8, 10}.

Agent C does not distinguish among worlds within sets: C1 = {5, 9, 12}, C2 = {1, 7, 6}, C3 = {4, 3, 11}, C4 = {2, 8, 10}.

The structure of equivalence classes is known to everyone.

World 1 is realized. Agents A, B and C learn the equivalence class where this world is contained. Agents A and B can publicly announce and remove the worlds they seem impossible in any order they choose.

The task of A and B is to find out which world is actual, while C does not guess this world.

Question: Can A and B win? If yes, then construct a winning sequence of announcements. If not, then explain why.

Решение.

Отметим одно из наиболее сильных возможных решений за A и B.

Игрок A удаляет все миры, входящие в A2 и A4. Игрок B удаляет мир 8 и все миры, входящие в B1 и B3. Теперь A1=1, A3=7, B2=1, B4=7, C2=1,7.

При такой последовательности, даже если A и B объявят, что знают, то C не узнает.

При этом C не может догадаться, что игроки удаляли те миры, которые приводят к правильному миру 1, так как если бы реальным миром был 7, то у A и B гарантированного выигрыша нет, но раз уж проигрывать, то можно рискнуть и удалить один из миров, которые считается возможно реальным — такая стратегия домирующая по сравнению с гарантированным проигрышем — и если удалена 8, то они узнают, что реальный мир 7 (и выиграют), а 1 оставляют, чтобы C не знал какой именно мир 1 или 7.

Критерии.

Как видно из решения, основная идея в конкретной задаче: удаление миров так, чтобы у игрока C остались возможными миры 1 и 7.

Дополнительные вопросы, которые могли возникнуть:

- Узнает ли C, что A и B уже узнали, т.е. есть ли объявление "мы узнали!"?

- Могут ли A и B не объявлять, что знают, а сделать дополнительные шаги и объявить о выигрыше когда им удобно.
- Какое поведение C ожидает от A и B, если A и B знают, что не смогут выиграть или что у них нет гарантированного выигрыша?

Ответы следующие:

- A и B не объявляют, что узнали. И, в принципе, могут, сделать дополнительные ходы и объявить о выигрыше когда им удобно (хотя непонятно зачем, ведь как только они скрытно узнали, а C — нет, то условие их выигрыша уже выполнено и они уже выиграли).
- A и B могут вести себя произвольно, если не могут выиграть, в том числе и пытаться привести C в заблуждение, что они могут выиграть, и это известно C.

Если при решении указаны эти или другие, но более сильные предположения и рассмотрены все варианты, то оценка не снижается. Например, если задача решена при предположении, что A и B должны объявлять, что узнали, чтобы выиграть, и при этом в решении показан алгоритм как и в этом случае выиграть и т.д.

Для получения полного балла достаточно даже решения, когда Игрок A удаляет все миры, входящие в A2 и A4,а игрок B удаляет все миры, входящие в B1 и B3.

- 15 баллов – за правильное и полное решение, а также за решение, не учитывающее догадливость C (в условии про догадливость не было пояснений).
- 10-14 баллов – если ответ верный, но содержит ошибки в обосновании (например, утверждается, что игроки чего-то не могут, в то время, когда существует опровергающий это утверждение контрпример).
- 5 баллов – за правильный ответ (включающий стратегию) без дополнительного обоснования.
- Снижение на 1-2 балла – за некритичные ошибки в рассуждениях.
- Снижение на 5-10 баллов – за критичные ошибки в рассуждениях в зависимости от критичности.
- 0-5 балла – за попытку решения.

Задача 6. Размышления о Римской Империи (15 баллов)

Латинским квадратом размера N×N называется матрица размера N×N, заполненная натуральными числами от 1 до N таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце каждое число встречается ровно один раз.

Моряки Амадеус и Бонифациус нашли сундук, в котором хранится N+1 одинаковых жемчужин. Они стали спорить, кто из них внес больший вклад в поиск сокровищ и достоин получить большее количество жемчужин. Моряки пошли к императору, чтобы тот решил их спор.

Император нарисовал латинский квадрат размера N×N, который заполнен числами от 1 до N. Моряки знают какой квадрат нарисовал император. Каждый из моряков тайно записывает число от 1 до N. В латинском квадрате выбирается строка с номером, который записал на папирусе Амадеус, и столбец с номером, который записал Бонифациус. В ячейке на пересечении выбранных моряками строки и столбцов число K: Амадеус получает K жемчужин, Бонифациус остальные N+1-K жемчужин.

Верно ли, что шансы моряков на успех одинаковы, независимо от того, какой латинский квадрат нарисует император? Обоснуйте свой ответ.

Reflections on the Roman Empire (15 points)

An N×N Latin square is an N×N matrix filled with natural numbers from 1 to N in such a way that each number appears exactly once in each row and each column.

The sailors Amadeus and Bonifacius found a chest containing N+1 identical pearls. They began to argue which of them made a greater contribution to the search for treasures and deserves to receive more pearls. The sailors went to the emperor to resolve their dispute.

The emperor drew a Latin square of size N×N, which is filled with numbers from 1 to N. The sailors know which square the emperor drew. Each of the sailors secretly writes down a number from 1 to N. In the Latin square, a row is selected with the number that Amadeus wrote down on the papyrus, and a column with the number that Bonifacius wrote down. The number K in the cell at the intersection of the rows and columns chosen by the sailors means that Amadeus receives K pearls, Bonifacius receives the remaining N+1-K pearls.

Is it true that the sailors' chances of success are the same, regardless of which Latin square the emperor draws? Justify your answer.

Решение.

Докажем вспомогательное утверждение: если Амадеус равновероятно выбирает между строками, то его ожидаемый выигрыш равен $\frac{N+1}{2}$.

Обозначим $s_1, ..., s_N$ чистые стратегии моряка А (индекс по номеру выбранной строки); $t_1, ..., t_N$ чистые стратегии моряка Б (индекс по номеру выбранного столбца). Пусть моряк Б использует некоторую стратегию $t = \sum_j^N w_j t_j$, где w_j - вероятность выбора чистой стратегии t_j; $\sum_j^N w_j = 1$. Также обозначим за $u_A(s_i, t_j)$ число, которое записано на пересечении i-ой строки и j-го столбца латинского квадрата (то есть выигрыш Амадеуса в зависимости стратегий обоих моряков).

Покажем, что если моряк А использует стратегию $\sum_i^N \frac{1}{N} s_i$, то он получает ожидаемый выигрыш $U_A = \frac{N+1}{2}$ независимо от стратегии t моряка Б.

$$U_A = \sum_i^N \sum_j^N \frac{1}{N} w_j u_A(s_i, t_j) = \frac{1}{N} \sum_j^N w_j [\sum_i^N u_A(s_i, t_j)] =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_j^N w_j \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2N} \sum_j^N w_j = \frac{N+1}{2}$$

Мы воспользовались тем, что в любом столбце латинского квадрата каждое число от 1 до N встречается ровно один раз, и поэтому $\sum_i^N u_A(s_i, t_j) = 1 + ... + N = \frac{N(N+1)}{2}$ для любого j.

Итак, моряк А может себе гарантировать себе ожидаемый выигрыш $\frac{N+1}{2}$. Так как всего разыгрывается $N+1$ жемчужина, то отсюда следует, что моряк Б не может гарантировать себе выигрыш более, чем $(N+1) - \frac{N+1}{2} = \frac{N+1}{2}$.

Аналогично доказывается, что моряк Б гарантирует себе выигрыш $\frac{N+1}{2}$, выбирая между чистыми стратегиями равновероятно. Отсюда следует, что при правильной игре моряка Б ожидаемый выигрыш моряка А не может превышать $\frac{N+1}{2}$. А это значит, что в любом равновесии каждый из моряков получает одинаковый выигрыш $\frac{N+1}{2}$, то есть их шансы равны.

Ответ: верно, шансы моряков на успех одинаковы.

Замечание: латинский квадрат не обязан быть симметричным, поэтому доказательства, предполагающее симметричность игры, к сожалению не верны

1234 2413 4321 3142

Критерии.

- (0 баллов). Неверный ответ; нет ответа на поставленный вопрос; ответ, что шансы одинаковы, при том, что игроки получат какой угодно выигрыш (противоречие); ответ, что шансы одинаковые при рассуждении о том, что все числа встречаются в каждой строке и столбце.

- (1 балл). Верный ответ при аргументации через симметричность игры.
- (5 баллов). Верный ответ при аргументации через равенство выигрышей при любой стратегии соперника, и как следствие, равновероятности хода каждого игрока.
- (15 баллов). Верный ответ при агрументации о равенстве выигрышей от любой стратегии игрока в ответ на равновероятную стратегию другого, и как следствие, смешанное равновесие при равновероятной игре обоих.