Критерии оценивания заданий заключительного этапа по направлению «Математика»

Задания по направлению состояли только из инвариантной части. Для того, чтобы претендовать на статусы медалиста, дипломанта I, II, III степени, участникам необходимо набрать наибольшее число баллов за все задания.

<table>
<tr><th>Номер задания</th><th>Максимальный балл</th><th>Учёт в рейтинге по направлению</th></tr>
<tr><td>1</td><td>20</td><td rowspan="8">✓
В сумме за задания можно получить не более 100 баллов</td></tr>
<tr><td>2</td><td>20</td></tr>
<tr><td>3</td><td>20</td></tr>
<tr><td>4</td><td>20</td></tr>
<tr><td>5</td><td>30</td></tr>
<tr><td>6</td><td>30</td></tr>
<tr><td>7</td><td>30</td></tr>
<tr><td>8</td><td>30</td></tr>
</table>

Ниже в документе представлены подробные критерии оценивания каждой из задач.

Решения задач олимпиады "Высшая лига" по направлению "Математика"

Задача 1. *Рассмотрим* $A, B \in M_{2024}(\mathbb{C})$. *Пусть минимальный многочлен матрицы* A *равен* $(x+2024)^3$, *а характеристический многочлен матрицы* B *равен* x^{2024}. *Более того,* v *– собственный вектор для* A *тогда и только тогда, когда* v *– собственный вектор для* B. *Докажите, что* $B^{1350} = 0$.

Решение. Обозначим через

$$V := \ker B = \ker(A - 2024) \subset \mathbb{C}^{2024}.$$

Решение состоит из двух независимых утверждений $\lceil \frac{2024}{3} \rceil \leq \dim V$ и $B^{2025-\dim V} = 0$.

1. Известно, что для любых операторов $X, Y \in \mathrm{End}(U)$ на конечномерном векторном пространстве U выполнено

   $$\dim\ker(XY) \leq \dim\ker X + \dim\ker Y.$$

   Последовательно применяя это неравенство к оператору $A - 2024$ и используя $\ker(A-2024) = V$ и $(A-2024)^3 = 0$, получим

   $$2024 \leq 3\dim V, \quad \text{откуда} \quad 675 \leq \dim V.$$

2. Из нильпотентности B следует, что если $B^k \neq 0$, то

   $$\dim\ker B^{k+1} < \dim\ker B^k.$$

   Действительно, в противном случае оператор $B|_{\mathrm{Im}(B^k)}$ является автоморфизмом, что противоречит его нильпотентности. Таким образом, $B^{\dim \mathrm{Im}(B)} \circ B = 0$. Пользуясь неравенством

   $$\dim \mathrm{Im}(B) \leq 2024 - \dim V,$$

   получаем $B^{2025-\dim V} = 0$.

Откуда следует искомая оценка $2025 - 675 = 1350$. □

Комментарий: оба шага можно аналогично доказывать, используя корневое разложение или его координатный аналог — жорданову нормальную форму, но достаточно базовых свойств размерности и рангов операторов. Также нетрудно построить A и B, удовлетворяющие условию задачи, что $B^{1349} \neq 0$, поэтому оценка точна, а любые рассуждения дающие более сильную оценку — ошибочны.

Задача 2. *Пусть* $f(x) = e^{\sin x}$. *Докажите, что существуют два многочлена* $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ *степени не больше двух такие, что*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} + o(x^4)$$

и найдите их.

Решение. Разложим функцию $f(x) = e^{\sin x}$ в ряд Тейлора в точке 0 с точностью до $o(x^4)$ (в ряд Маклорена).

Воспользуемся известными из анализа рядами Маклорена элементарных функций e^t и $\sin x$.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + o(x^4) \tag{1}$$

$$t(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \tag{2}$$

Теперь остаётся подставить (2) в (1), чтобы получить желаемое разложение:

$$f(x) = e^{\sin x} = 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{1}{2}(x^2 - 2 \cdot \frac{x^4}{6}) + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

После приведения подобных слагаемых получаем

$$f(x) = e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \tag{3}$$

Напомним, что нам нужно найти два многочлена $p(x)$ и $q(x)$ с действительными коэффициентами степени не больше двух такие, что

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} + o(x^4). \tag{4}$$

Будем искать $p(x)$ в виде $p_0 + p_1x + p_2x^2$ и $q(x)$ в виде $1 + q_1x + q_2x^2$. Поскольку в этом случае $q(x)o(x^4) = o(x^4)$ и $\frac{o(x^4)}{q(x)} = o(x^4)$, то (4) можно переписать в виде:

$$f(x) \cdot q(x) = p(x) + o(x^4). \tag{5}$$

После подстановки (3) и выражений для многочленов $p(x)$ и $q(x)$ в (5) имеем

$$(1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4))(1 + q_1x + q_2x^2) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + o(x^4),$$

откуда, приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях переменной x, получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1 = p_0 \\ q_1 + 1 = p_1 \\ q_2 + q_1 + \frac{1}{2} = p_2 \\ \frac{q_1}{2} + q_2 = 0 \\ -\frac{1}{8} + \frac{q_2}{2} = 0, \end{cases} \iff \qquad \begin{cases} p_0 = 1 \\ p_1 = \frac{1}{2} \\ p_2 = \frac{1}{4} \\ q_1 = -\frac{1}{2} \\ q_2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Таким образом, мы находим многочлены $p(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$ и $q(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$ степени не больше двух такие, что (4) выполнено.

□

Задача 3. *Рассмотрим аналитическую функцию $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, где*

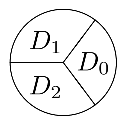
$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Пусть $f(z) \in \mathbb{R}$, если $\arg z = \pm\dfrac{\pi}{3}$. Докажите, что $f(\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}$.

Решение. Положим

$$D_k = \{re^{i\phi} \mid r \in (0,1),\, \phi \in \left(\frac{(2k-1)\pi}{3}, \frac{(2k+1)\pi}{3}\right)\} \subset \mathbb{D}, \quad k = 0, 1, 2$$

(см. рис.)



и определим функцию

$$g_1 \colon D_1 \to \mathbb{C}, \quad g_1(z) = \overline{f(s_{\pi/3} z)},$$

где s_ϕ обозначает осевую симметрию относительно прямой $e^{i\phi}\mathbb{R}$. Из принципа симметрии следует, что g_1 голоморфна на всей области определения, а из единственности аналитического продолжения следует, что она совпадает с $f|_{D_1}$, т.е.

$$f(z) = \overline{f(s_{\pi/3} z)}, \quad \forall z \in D_1. \tag{6}$$

В частности, $f(z) \in \mathbb{R}$ при $\operatorname{Arg} z = \pi$. Похожим образом с помощью функций

$$g_2 \colon D_2 \to \mathbb{C}, \quad g_2(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad \text{и} \quad g_3 \colon D_0 \to \mathbb{C}, \quad g_3(z) = \overline{f(s_{-\pi/3} z)},$$

можно показать, что

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})}, \quad \forall z \in D_2, \tag{7}$$

$$f(z) = \overline{f(s_{-\pi/3} z)}, \quad \forall z \in D_0. \tag{8}$$

Следовательно, для любого $a \in (0,1)$ имеем

$$f(a) \overset{(6)}{=} \overline{f(s_{\pi/3} a)} \overset{(7)}{=} f(\overline{s_{\pi/3} a}) = f(s_{-\pi/3} a) \overset{(8)}{=} \overline{f(a)}.$$

При $a = 1/2$ получаем требуемое. $\square$

Задача 4. *Пусть G – конечная неабелева группа и $Z(G)$ – её центр. Докажите, что*

$$|Z(G)| \leqslant \frac{1}{4}|G|$$

и приведите пример конечной группы, для которой достигается равенство.

Решение. Центр является нормальной подгруппой, рассмотрим факторгруппу $H = G/Z(G)$. По условию H нетривиальна. Нам нужно показать, что $|H| \geq 4$. Предположим противное, тогда порядок H равен 2 или 3. Т.к. порядок H простой, то H циклическая. Пусть образ $a \in G$ является образующей в H. Обозначим $|H| = p$, где $p = 2$ or $p = 3$. Тогда любой элемент группы G записывается в виде $a^k \cdot z$, где $0 \leq k \leq p - 1$ и $z \in Z(G)$. Т.к. $Z(G)$ коммутирует со всеми элементами группы G и a^k коммутирует с a^l, то любые $a^k \cdot z$ и $a^l \cdot z'$ коммутируют друг с другом. Следовательно, G является абелевой группой и мы получили противоречие.

Возможный пример: $G = Q_8$, группа единичных кватернионов. Порядок равен 8, центр сосотоит из ± 1 (это следует из таблицы умножения между i, j, k: $i^2 = j^2 = k^2 = -1 = ijk$)

□

Задача 5. *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} y'(t) = x + yT(x, y) \\ x'(t) = -y + xT(x, y), \end{cases}$$

где $T(x, y) = e^{-x^4 - y^2}$. *Существует ли решение* $(x(t), y(t))$ *определённое на интервале* $(a, b) \subset \mathbb{R}$,

$$-\infty \leq a < b \leq \infty$$

для которого $x(t)$ *будет неограниченной функций от* t*?*

Решение. В полярных координатах уравнение имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \varphi'(t) = 1 \\ r'(t) = rT(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)). \end{cases}$$

Рассмотрим решение с начальными условиями $\varphi_0 = 0, r_0 = 10$. Докажем, для него $x(t)$ не ограничено при $t \geq 0$. Ясно, что $\varphi(t) = t$.

Если бы это решение было бы определено на полуинтервале $[0; t_0)$ при чем t_0 было бы максимальным, то $r(t) \to +\infty$ при $t \to t_0 - 0$. Отсюда бы следовало что $x(t)$ неограниченно. Поэтому мы можем предположить, что решение продолжается неограниченно вправо. Как было сказано выше, достаточно показать, что при $t \to +\infty$ имеем $r(t) \to +\infty$. Имеем

$$(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = x^4 + y^2(2x^2 + y^4) \geq x^4 + y^2.$$

Последнее верно, так как при $r \geq 10$ имеем $2x^2 + y^4 \geq 1$. Поэтому $r' \geq re^{-r^2}$.

Предположим, что r ограничена. Функция r строго монотонно возрастает. Пусть r_0 ее предел при $t \to +\infty$. Пусть $t = g(r)$. Мы получаем, что существует r_0, такое что когда $r \to r_0 - 0$, $g(r) \to +\infty$. Но

$$g'(r) = 1/(r'(t)) \leq e^{r^2}/r.$$

Поэтому g ограничена на полуинтервале $[10; r_0)$. Противоречие.

□

Задача 6. *Дан додекаэдр с центром O в начале координат. Для прямой l проходящей через O, обозначим через $\varphi(l)$ сумму $\sum\limits_P d(O,\pi_l(P))^2$. Здесь сумма берется по всем вершинам додекаэдра, и $d(O,\pi_l(P))$ расстояние от начала координат до ортогональной проекции вершины P на прямую l. Зависит ли $\varphi(l)$ от прямой l?*

Решение. В исходной формулировке была допущена ошибка: предполагается либо, что прямая l проходит через O, либо что рассматривается сумма $d(\pi_l(O),\pi_l(P))^2$. В противном случае задача не слишком содержательна и при удалении l от O расстояние $d(O,\pi_l(O))$ будет неограниченно расти, а следовательно и сумма квадратов. Это не является содержательной частью задачи.

Рассмотрим квадратичную форму $q(X)=\sum_P (P,X)^2$, где (P,X) — скалярное произведение. По определению, $q(X)=\phi(OX)$ для $X\in S^2$, где S^2 — единичная сфера, содержащая вершины додекаэдра.

Способ 1.
Заметим, что квадратичная форма q является положительно определённой, поэтому её сферы $q=\mathrm{const}$ задаются некоторыми эллипсоидами. Рассмотрим группу G собственных движений пространства, сохраняющих q. Приведём квадрику q к главным осям $q(x)=a_i x_i^2$, тогда есть 3 возможности для группы G: все a_i различны, тогда $G\cong(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, либо ровно 2 коэффициента совпадают, тогда $G\cong \mathbb{S}O(2)$, либо все 3 совпадают, тогда $G=SO(3)$ и нули $q-\mathrm{const}$ являются сферами. Заметим, что с другой стороны группа A_5 собственных автоморфизмов додекаэдра вложена в G, поэтому она не может быть коммутативной. Следовательно q постоянна на S^2, что и требовалось.

Способ 2.
Для любой грани выберем параллельную ей плоскость H, пересекающую единичную сферу по окружности. В пересечении $H\cap S^2$ выберем точку X. Поскольку q инвариантна относительно действия группой додекаэдра, выражение $q-q(X)$ равно нулю на орбите X циклического действия поворотом додекаэдра. Поэтому ограничения квадрик S^2 и $q-q(X)$ на плоскость H пересекаются как минимум в 5 точках. Откуда следует, что они тождественно совпадают на H и q постоянна на всех окружностях, параллельных граням додекаэдра.
Используя связность S^2, докажем, что q постоянна на всей сфере. В самом деле, рассмотрим максимальную область D на сфере, в которой q постоянна. Тогда D замкнута, поскольку q непрерывна. И D открыта, поскольку в окрестности каждой точки есть 2 непрерывных семейства трансверсальных окружностей, на каждой из которых q постоянна.

Способ 3.
Сначала докажем аналогичное утверждение для куба. Рассмотрим куб с вершинами в точках $(\pm1,\pm1,\pm1)$, лежащих на сфере радиуса 3. Для любой точки $X=(a,b,c)$ на единичной сфере сумма скалярных произведений по

вершинам куба равна

$$\sum_P (P,X)^2 = \sum_{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3} (\pm a \pm b \pm c)^2 = 8(a^2+b^2+c^2) = 8,$$

где все слагаемые линейные по a, b или c сокращаются, поскольку сумма инвариантна относительно замен знаков. Складывая такие суммы по всем 5 кубам в додекаэдре, мы учитываем каждую вершину дважды. Таким образом, для додекаэдра с вершинами на единичной сфере получаем:

$$\phi(l) = q(X) = \frac{5*8}{2\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}}.$$

В частности, она не зависит от прямой $l = OX$, что и требовалось. $\square$

Задача 7. *В однородном шаре массы M и радиуса R сделан тонкий прямолинейный сквозной канал, середина которого находится на расстоянии $a < R$ от центра шара. Материальная точка массы m начинает движение сквозь канал без начальной скорости под действием гравитационного притяжения шара. Начальное положение точки — на поверхности шара, трение и другие силы, отличные от гравитационного взаимодействия шара и материальной точки, отсутствуют. Найдите время движения материальной точки сквозь канал до противоположного выхода на поверхность шара.*

Решение. Введем одномерную систему координат Ox, ось которой направим вдоль туннеля, а начало координат поместим в его середину. Из геометрии задачи легко следует, что координаты концов туннеля в данной системе отсчета даются числами $\pm x_0 = \pm\sqrt{R^2 - a^2}$. Сила гравитационного взаимодействия материальной точки и шара изменяется по мере движения вдоль туннеля, ее вектор все время направлен к центру шара, а модуль дается выражением

$$|\vec{F}(x)| = \gamma\,\frac{mM}{R^3}\sqrt{x^2+a^2},$$

где γ — гравитационная постоянная, а $\sqrt{x^2+a^2}$ — расстояние от центра шара до текущего положения точки m внутри туннеля.

Выберем нулевое значение потенциальной энергии гравитационного взаимодействия на поверхности шара. Тогда, вычисляя работу проекции силы $\vec{F}(x)$ при движении вдоль туннеля от поверхности шара до точки x, получаем значение потенциальной энергии:

$$U(x) = \gamma\,\frac{mM}{2R^3}\,(x^2 - x_0^2).$$

Поскольку начальная скорость частицы m на входе в туннель равнялась нулю, то, с учетом выбора нулевого уровня потенциальной энергии, заключаем, что полная механическая энергия частицы равна нулю и, следовательно, ее скорость в точке x туннеля равна

$$v^2(x) = -\frac{2}{m}\,U(x) = \frac{\gamma M}{R^3}\,(x_0^2 - x^2).$$

В силу симметрии задачи, время движения сквозь туннель равно удвоенному значению времени движения до центра туннеля:

$$T = 2\int_0^{x_0} \frac{dx}{|v(x)|} = \pi R\sqrt{\frac{R}{\gamma M}}.$$

Заметим, что ответ не зависит от максимальной глубины пролегания туннеля a. $\square$

Задача 8. *Три электрических заряда величиной $q_1 = q_2 = q$ и $q_3 = 2q$ и одинаковой массы m покоятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной ℓ. Заряды попарно соединены невесомыми нерастяжимыми нитями длины ℓ. В некоторый момент времени нить, соединяющую одинаковые заряды q разрезают. Оцените в дипольном приближении полную мощность электромагнитного излучения в момент времени, когда заряды в процессе движения расположатся вдоль прямой линии. Движение зарядов происходит со скоростями много меньшими скорости света, всеми силами, кроме электростатических, а также потерями энергии на излучение за рассматриваемый период времени можно пренебречь.*

Решение. Поместим начало инерциальной системы отсчета в центр масс заряженных частиц, дипольный момент системы дается выражением:

$$\vec{d} = q(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + 2\vec{r}_3),$$

где $\vec{r}_i$ — радиус-векторы двух зарядов q и заряда $2q$.

Полная мощность W дипольного излучения в системе единиц СГС определяется формулой:

$$W = \frac{2}{3c^3}\,|\,\ddot{\vec{d}}\,|^2,$$

где точки над вектором $\vec{d}$ обозначают вторую производную по времени.

После разрезания нити, соединяющей заряды q, система будет совершать колебания в плоскости, содержащей исходный равносторонний треугольник начального расположения зарядов. Из закона сохранения полного импульса сразу следует, что заряд $2q$ будет совершать колебания вдоль отрезка прямой, проходящей через центр масс и содержащей высоту равностороннего треугольника из вершины $2q$. Заряды q будут колебаться вдоль дуг выпуклых кривых (нити ℓ все время натянуты), расположенных зеркально симметрично относительно прямой, вдоль которой движется заряд $2q$.

В момент, когда заряды расположены на одной прямой, силы натяжения нитей, действующие на заряд $2q$, противонаправлены и равны по модулю. Поэтому мгновенное ускорение $\ddot{\vec{r}}_3$ заряда $2q$ будет равно нулю. Эти же силы натяжения в рассматриваемый момент будут перпендикулярны скоростям зарядов q, обеспечивая им равные по модулю и противоположно направленные центростремительные ускорения: $\ddot{\vec{r}}_1 = -\ddot{\vec{r}}_2$. Таким образом, вторая производная вектора дипольного момента системы $\vec{d}$ в рассматриваемый момент движения зарядов будет равна нулю, как и мгновенная мощность дипольного излучения $W = 0$.

Замечание. Мощность излучения в данном примере нельзя рассчитывать как сумму отдельных излучений от каждого из ускоренно движущихся зарядов. Дело в том, что модуль суммы векторов не равен сумме модулей слагаемых, поэтому складывая мощности излучения от отдельных зарядов мы игнорируем эффект интерференции излученных волн, который в данном случае и приводит к нулевому ответу для полной мгновенной мощности излучения. $\square$

Критерии оценки задач олимпиады "Высшая лига" по направлению "Математика", 2024 год

Задача 1

[5 баллов] Доказано, что размерность собственного подпространства A не меньше 675.
[5 баллов] Доказано, что размерность ядра B не меньше 675, то $B^{1350} = 0$.
[-4 балла] Существенная ошибка, не влияющая на остальное рассуждение.
[-1 балл] Арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения.
[0 баллов] Переписывание условия, формулировка базовых определений и теорем.

Задача 2

[14 баллов] Верный ответ с проверкой, отсутствуют вычисления.
[12 баллов] Верно составлена система линейных уравнений на коэффициенты искомых многочленов.
[9 баллов] Верно составлена система нелинейных уравнений на коэффициенты искомых многочленов.
[5 баллов] Верно найдено разложение функции $e^{\sin x}$ в ряд Тейлора с точностью до $o(x^4)$.
[1 балл] Верно найдено разложение функции $e^{\sin x}$ в ряд Тейлора с точностью до $o(x^3)$.
[-1 балл] Опущены рассуждения о равносильности перехода при умножении обеих частей доказываемого равенства на многочлен $q(x)$, стоящий в знаменателе рациональной функции.
[-1 балл] Арифметическая ошибка на финальной стадии решения.
[-2 балла] Неверно вычислен коэффициент при x^4 ряда Тейлора функции $e^{\sin x}$.
[-3 балла] Неверно вычислены коэффициенты при x^3 и при x^4 ряда Тейлора функции $e^{\sin x}$.
[от -3 до -7 баллов] Ошибки при составлении системы уравнений на коэффициенты искомых многочленов.
[-5 баллов] Ряд Тейлора функции $e^{\sin x}$ выписан без пояснений.

Задача 3

[-1 балл] Следующее утверждение используется без обоснования: если степенной ряд в некоторой окрестности нуля сходится к нулю, то все коэффициенты ряда равны нулю.
[-1 балл] Доказано неверное утверждение (например, что $f(1/2) = 0$) при верном решении.

Задача 4

[9 баллов] Рассмотрен фактор и верно разобран случай $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
[7 баллов] Рассмотрен фактор и сказано, что фактор может быть $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
[5 баллов] Рассмотрен фактор по центру.
[5 баллов] Изоморфность фактора $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
[5 баллов] Верное доказательство, что из цикличности G/Z следует коммутативность G.
[5 баллов] Верный пример.
[-2 балла] Нет доказательства, что из цикличности G/Z следует коммутативность G.
[-5 баллов] Сказано, что из коммутативности G/Z и Z следует коммутативность G.

Задача 5

[15 баллов] Доказано, что на ограниченном интервале не существует неограниченного решения.
[5 баллов] Рассматривается функция $r(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ и присутствует идея оценить ее производную.

Задача 6

[30 баллов] Полное доказательство, что $\phi(l)$ не зависит от прямой l, если она проходит через центр додекаэдра.
[1 балл] Доказательство, что $\phi(l)$ зависит от прямой l, если она произвольная.

Задача 7

[10 баллов] Верное выражение для силы гравитационного взаимодействия внутри шара.
[5 баллов] Верное выражение для соответствующей потенциальной энергии.
[5 баллов] Верное выражение для закона сохранения энергии.
[5 баллов] Верное вычисление времени движения в туннеле.
[от -2 до -5 баллов] За технические ошибки в расчетах (потеря знака, параметра, коэффициента и т.п.), в зависимости от её серьезности.

Задача 8

[5 баллов] Верная формула для дипольного момента системы и мгновенной мощности излучения.

[15 баллов] Верное качественное описание характера движения зарядов с обоснованием (например, с использованием интегралов движения).
[5 баллов] Верное обоснование отсутствия ускорения заряда $2q$.
[5 баллов] Верное обоснование взаимной компенсации ускорений зарядов q и вывод о равенстве нулю второй производной вектора дипольного момента.
[до 10 баллов] Если сделано неверное предположение о суммировании излучений каждого заряда по отдельности, но проведен верный расчет ускорений всех зарядов.
[от -2 до -5 баллов] За технические ошибки в расчетах (потеря знака, параметра, коэффициента и т.п.), в зависимости от серьезности ошибки.