Решения заданий заключительного этапа
по направлению «Физика»

Задания по направлению состояли только из инвариантной части. Для того, чтобы претендовать на статусы медалиста, дипломанта I, II, III степени, участникам необходимо набрать наибольшее число баллов за все задания.

Номер задания	Максимальный балл	Учёт в рейтинге по направлению
1	20	✓
2	20	✓
3	20	✓
4	20	✓
5	20	✓

Задача 1. Орбита Земли при ее движении вокруг Солнца представляет собой эллипс, близкий к окружности. Минимальное расстояние от Земли до Солнца (перигелий) равно r_1 = 147 млн.км, а максимальное расстояние (афелий) равно r_2 = 152 млн.км. Найти разность скоростей Земли в точках минимального и максимального сближения с Солнцем. Масса Солнца равна M=2 ·10^{30} кг.

Решение задачи 1:
В перигелии и афелии скорость Земли перпендикулярна направлению на Солнце. Следовательно, в силу закона сохранения момента импульса $r_1 v_1 = r_2 v_2$, где v_1 и v_2 - скорости Земли в перигелии и афелии. В силу небольшой разницы скоростей можно написать

$$v_1 - v_2 = \frac{r_2 - r_1}{r}\, v.$$

Здесь r и v - радиус орбиты Земли и ее скорость в приближении круговой орбиты, которые связаны соотношением

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r},$$

где G - гравитационная постоянная. Таким образом

$$v_1 - v_2 = \frac{r_2 - r_1}{r} \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Подставляя сюда $r = 150$ млн.км, находим $v_1 - v_2 \approx 1$ км/с.

Разбалловка:

Правильно записан закон сохранения момента импульса	6
Записан закон всемирного тяготения	6
Записана формула для ускорения при равномерном движении по окружности	2
Получен правильный ответ	6
Задача решена верно другим способом	20

Задача 2. Помещенный в вакуум сосуд содержит равновесный газ с температурой T. Из сосуда в вакуум через малое отверстие (меньше длины свободного пробега) вылетают молекулы газа, которые частично попадают через малое отверстие в соседний сосуд, в котором первоначально также был вакуум. Проведенная через отверстия ось перпендикулярна поверхности каждого из сосудов. Найти температуру газа во втором сосуде после установления в нем теплового равновесия.

Решение задачи 2:
Выберем ось координат, проходящую через отверстия. Обозначим v скорость молекулы газа в направлении этой оси. Распределение вероятности молекул в первом сосуде по скорости v:

$$P \propto exp\left(-\frac{mv^2}{2k_BT}\right),$$

где m - масса молекулы. Нас интересуют только молекулы, вылетающие через отверстие, для них $v > 0$. Число молекул со скоростями в интервале dv, которые подлетают к отверстию в единицу времени, пропорционально $v\, Pdv$. Во второй сосуд попадают только те молекулы, которые вылетают из отверстия с малыми компонентами скоростей, перпендикулярными взятой оси. Следовательно, средняя кинетическая энергия молекул, попадающих во второй сосуд, равна

$$\frac{\int_0^\infty dv\, mv^3\, P/2}{\int_0^\infty dv\, v\, P} = k_BT.$$

В тепловом равновесии средняя энергия молекулы равна $\frac{3}{2}k_BT_1$. Приравнивая эту величину к k_BT, находим $T_1 = \frac{2}{3}T$.

Разбалловка:

Записано выражение для распределения Максвелла (Больцмана)	4
Получено выражение для числа попадающих в отверстие молекул за единицу времени	6
Найдена средняя энергия попадающих во второй объем частиц	8
Получен окончательный ответ	2
Задача решена верно другим способом	20

Задача 3. Найти емкость конденсатора на единицу длины, обкладками которого являются плоская проводящая пластина и параллельный ей проводящий цилиндр радиуса R, зазор между которыми h много меньше радиуса цилиндра, $h \ll R$.

Решение задачи 3:
Расстояние между поверхностями пластины и цилиндра приблизительно равно $h + x^2/(2R)$, где x - расстояние от проекции оси цилиндра на поверхность пластины до точки наблюдения, выражение справедливо, если x$\ll R$. Поэтому напряженность электрического поля между цилиндром и пластиной равно приблизительно

$$E = \frac{U}{h + x^2/(2R)},$$

где U - разность потенциалов между цилиндром и пластиной. Плотность заряда на поверхности пластины равна

$$\rho = \frac{E}{4\pi} = \frac{U}{4\pi[h + x^2/(2R)]}.$$

Поэтому заряд конденсатора на единицу длины цилиндра равен

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \rho = \sqrt{\frac{R}{8\,h}}\, U.$$

Таким образом, емкость на единицу длины цилиндра равна

$$\frac{q}{U} = \sqrt{\frac{R}{8\,h}}.$$

Разбалловка:

Получено выражение для расстояния между пластиной и цилиндром	4
Получена формула для напряженности электрического поля	5
Вычислен заряд конденсатора на единицу длины	8
Получен окончательный ответ	3
Задача решена верно другим способом	20

Задача 4. В колебательном контуре, состоящем из плоского конденсатора и катушки индуктивности, возбуждаются колебания с амплитудой, U_0 разности потенциалов на конденсаторе. Найти мощность излучения контура, если расстояние между обкладками конденсатора равно h и известна индуктивность L катушки индуктивности.

Решение задачи 4:
Емкость плоского конденсатора равна $C = S/(4\pi h)$, где h - расстояние между обкладками, а S - их площадь. За счет возникновения на обкладках зарядов CU (U - разность потенциалов между обкладками) в конденсаторе возникает дипольный момент

$$P = CU\,h = \frac{SC}{4\pi}.$$

Здесь $U = U_0 cos\omega t$, а $\omega = 1/\sqrt{LC}$. В системе СГС мощность дипольного излучения равна

$$I = \frac{2}{3c^3}(\partial_t^2 P)^2,$$

где c - скорость света. Усредняя эту величину по периоду, находим

$$I = \frac{2}{3c^3}\frac{\omega^4 S^2}{(4\pi)^2}U_0^2 = \frac{h^2 U_0^2}{3c^3 L^2}.$$

Разбалловка:

Записано выражение для емкости конденсатора	2
Явно сказано, что излучение в колебательном контуре возникает за счет изменения дипольного момента в конденсаторе	5
Записано выражение для дипольного момента на конденсаторе	3
Записана формула для излучения при изменении во времени дипольного момента	7
Получен правильный ответ	3

Задача 5. Квантовая заряженная частица массы m находится в основном состоянии в Кулоновском поле с потенциалом $U = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$. В некоторый момент времени потенциал мгновенно меняется на $U = -\frac{\beta}{r}$, $\beta > 0$. Найти вероятность того, что частица окажется в основном состоянии в новом потенциале.

Решение задачи 5:
Волновая функция основного состояния равна
$$\Psi_\alpha = \frac{2m^{3/2}\alpha^{3/2}}{h^3} exp\left(-\frac{m\alpha}{h^3} r\right)$$
Она нормирована условием
$$\int_0^\infty dr\, r^2 \Psi_\alpha^2 = 1.$$
Перекрытие волновых функций равно
$$\int_0^\infty dr\, r^2 \Psi_\alpha \Psi_\beta = \frac{8\, \alpha^{3/2}\beta^{3/2}}{(\alpha+\beta)^3}.$$
Вероятность же равна квадрату этого выражения, то есть
$$\frac{64\, \alpha^3\beta^3}{(\alpha+\beta)^6}.$$

Разбалловка:

Записана (или получена) формула для волновой функции в основном состоянии в кулоновском потенциале	9
Записан верный интеграл для перекрытия волновых функций	6
Получен верный ответ	5