Критерии оценивания заданий заключительного этапа по направлению «Прикладная математика»

Задания по направлению состояли из двух частей: инвариантной (обязательной для всех участников) и вариативной (разделённой на треки). Для того, чтобы претендовать на статусы дипломанта I, II, III степени, участникам необходимо набрать наибольшее число за задания, учитываемые в рейтинге по конкретным трекам. Для того, чтобы стать медалистом, участникам необходимо успешно выполнить задания по любым двум трекам.

Номер задания	Макси-мальный балл	Учёт в рейтинге по треку		
		«Математические методы анализа в экономике»	«Математические методы в социологии»	«Прикладная математика в инженерии и естественных науках»
1	14	✓	✓	✓
2	14	✓	✓	✓
3	14	✓	✓	✓
4	7,25	✓		
5	7,25	✓		
6	7,25	✓		
7	7,25	✓		
8	7,25	✓		
9	7,25	✓		
10	7,25	✓		
11	7,25	✓		
12	29		✓	
13	29		✓	
14	14			✓
15	14			✓
16	10			✓
17	10			✓
18	10			✓

ИНВАРИАНТНАЯ ЧАСТЬ

Задание 1 «Линейная регрессия МНК»

Метод наименьших квадратов заключается в минимизации суммы квадратов регрессионных остатков (разностей между наблюдаемым и предсказанным значениями зависимой переменной). Он позволяет найти такую регрессионную прямую, которая будет проходить максимально близко ко всем наблюдаемым значениям, т.е. будет иметь наименьшую погрешность предсказания зависимой переменной из возможных вариантов.

Далее ожидается подробная запись расчёта уравнения регрессионной модели любым релевантным способом с одинаковой стоимостью решения (три возможных способа см. на след. страницах). **Искомое уравнение:** Y = 3,857+0,036*X

Интерпретация коэффициентов уравнения:

b0 = 3,857 – среднее значение итогового балла по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» при условии пропуска всех семинаров;

b1 = 0,036 – при увеличении активности посещения семинаров на 1% итоговый результат по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» в среднем увеличивается на 0,036 балла.

Критерии оценивания

Описана суть метода наименьших квадратов. Верно найдено регрессионное уравнение. Представлена интерпретация коэффициентов. Без ошибок – 14 баллов, *с небольшими неточностями* – 12-13 баллов.	12-14 баллов
Описана суть метода наименьших квадратов. Верно найдено регрессионное уравнение, имеются пояснения к решению, но решение представлено *недостаточно подробно*. ИЛИ *отсутствуют* два пункта задания – I, II или IV.	7-11 баллов
Описана суть метода наименьших квадратов. Сделан *верный заход* в решении с минимальными расчетами или с серьезными ошибками в расчетах	4-6 баллов
Описана суть метода наименьших квадратов	1-3 балла
Задание решено *неверно*	0 баллов

Способ 1 *(приведён в учебнике Блумана из списка литературы для подготовки)*

Сделаем необходимые расчёты:

n	x	y	x^2	x*y
№1	70	6	4900	420
№2	40	4	1600	160
№3	50	7	2500	350
№4	100	8	10000	800
№5	80	6	6400	480
№6	20	5	400	100
Сумма	360	36	25800	2310

Формулы для расчётов коэффициентов b0 и b:

$$b0 = \frac{(\sum y_i)(\sum x_i^2) - (\sum x_i)(\sum x_i\, y_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{n(\sum x_i\, y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}$$

Подставим значения в формулы:

$$b0 = \frac{36 * 25800 - 360 * 2310}{6 * 25800 - 360^2}$$

$$b = \frac{6 * 2310 - 360 * 36}{6 * 25800 - 360^2}$$

Упростим выражения:

$$b0 = \frac{928800 - 831600}{154800 - 129600} = \frac{97200}{25200}$$

$$b = \frac{13860 - 12960}{154800 - 129600} = \frac{900}{25200}$$

Отсюда: b0 ≈ 3,857
А также: b ≈ 0,036

Искомое уравнение: Y = 3,857 + 0,036*X

Способ 2

Сделаем необходимые расчёты и укажем систему уравнений для поиска коэффициентов:

n	x	y	x^2	x*y
№1	70	6	4900	420
№2	40	4	1600	160
№3	50	7	2500	350
№4	100	8	10000	800
№5	80	6	6400	480
№6	20	5	400	100
Сумма	360	36	25800	2310

$$\begin{cases} b\sum x_i^2 + b0\sum x_i = \sum x_i\, y_i \\ b\sum x_i + b0n = \sum y_i \end{cases}$$

Подставим значения:

$$\begin{cases} 25800b + 360b0 = 2310 \\ 360b + 6b0 = 36 \end{cases}$$

Сократим первое уравнение на 60, второе – на 6:

$$\begin{cases} 430b + 6b0 = 38{,}5 \\ 60b + b0 = 6 \end{cases}$$

Тогда: b0 = 6 – 60b
А значит: 430b + 6(6 – 60b) = 38,5
Раскроем скобки: 430b + 36 – 360b = 38,5
Приведём подобные слагаемые, оставим неизвестное в левой части уравнения: 70b = 2,5
Отсюда: b ≈ 0,036
А значит: b0 ≈ 3,857
Искомое уравнение: Y = 3,857+0,036*X

Решение системы уравнений возможно также, например, методом Крамера

Вычислим главный определитель системы, а также определитель b0 и b:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 430 & 6 \\ 60 & 1 \end{vmatrix} = 430 - 360 = 70 \neq 0 \text{ - система имеет единственное решение}$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 38{,}5 & 6 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 38{,}5 - 36 = 2{,}5$$

$$\Delta_{b0} = \begin{vmatrix} 430 & 38{,}5 \\ 60 & 6 \end{vmatrix} = 2580 - 2310 = 270$$

Найдём искомые коэффициенты:

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{2{,}5}{70} \approx 0{,}036$$

$$b0 = \frac{\Delta_{b0}}{\Delta} = \frac{270}{70} \approx 3{,}857$$

Способ 3

Сделаем необходимые расчёты:

n	x	y	$\hat{y}$	$e = y - \hat{y}$
№1	70	6	b0+70b	6-b0-70b
№2	40	4	b0+40b	4-b0-40b
№3	50	7	b0+50b	7-b0-50b
№4	100	8	b0+100b	8-b0-100b
№5	80	6	b0+80b	6-b0-80b
№6	20	5	b0+20b	5-b0-20b

Метод наименьших квадратов находит минимизирует сумму квадратов остатков:

$(6\text{-}b0\text{-}70b)^2 + (4\text{-}b0\text{-}40b)^2 + (7\text{-}b0\text{-}50b)^2 + (8\text{-}b0\text{-}100b)^2 + (6\text{-}b0\text{-}80b)^2 + (5\text{-}b0\text{-}20b)^2$

Воспользуемся формулой квадрата разности трёх чисел:

$(a\text{-}b\text{-}c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

1 слагаемое: $36+b0^2+4900b^2-12b0-840b+140b0b$
2 слагаемое: $16+b0^2+1600b^2-8b0-320b+80b0b$
3 слагаемое: $49+b0^2+2500b^2-14b0-700b+100b0b$

4 слагаемое: $64+b0^2+10000b^2-16b0-1600b+200b0b$
5 слагаемое: $36+b0^2+6400b^2-12b0-960b+160b0b$
6 слагаемое: $25+b0^2+400b^2-10b0-200b+40b0b$

Просуммируем слагаемые и приведём подобные слагаемые:

$226 + 6b0^2+25800b^2-72b0-4620b+720b0b$ – необходимо минимизировать данную сумму

Возьмём производную по b0: $12b0-72+720b$
Возьмём производную по b: $51600b-4620+720b0$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 12b0 - 72 + 720b = 0 \\ 51600b - 4620 + 720b0 = 0 \end{cases}$$

Сократим первое уравнение на 12, второе – на 60:

$$\begin{cases} b0 - 6 + 60b = 0 \\ 860b - 77 + 12b0 = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим: $b0 = 6-60b$
Тогда: $860b - 77 + 12(6 - 60b) = 0$
Раскроем скобки: $860b - 77 + 72 -720b = 0$
Приведём подобные слагаемые, оставим неизвестное в левой части уравнения: $140b = 5$
Отсюда: $b \approx 0,036$
А значит: $b0 \approx 3,857$
Искомое уравнение: <u>$Y = 3,857 + 0,036*X$</u>

Задание 2 «Математическая статистика»
Критерии: 7 баллов ставилось за верно найденную константу k и 7 баллов ставилось за верно рассчитанный уровень значимости.

Решение:

$$1-\beta=\mathbb{P}\left(H_1 \mid H_1\right)=\mathbb{P}\left(\min \left(X_1, X_2\right)>k \mid H_1\right)=$$
$$=\mathbb{P}\left(X_1>k, X_2>k \mid H_1\right)=\left(1-F_{X_1}(k)\right)^2=$$
$$=\left(1-\frac{k-2}{10}\right)^2=\frac{(12-k)^2}{100}=0.36$$

$$(12-k)^2=36$$
$$\left[\begin{array}{l} k=6 \\ k=18>12, \text{ следовательно, } k=6 \end{array}\right.$$
$$\alpha=\mathbb{P}\left(H_1 \mid H_0\right)=\mathbb{P}\left(\min \left(X_1, X_2\right)>6 \mid H_0\right)=\left(1-F_{X_1}(6)\right)_{H_0}^2=\left(1-\frac{6-0}{12-0}\right)^2=$$
$$=(1-0.5)^2=0.25$$

Answer: $\alpha=0.25$.

Задание 3 «Линейная алгебра»

Из векторов линейной оболочки составим матрицу:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & -4 \\ 3 & 11 & 8 \\ 2 & 9 & 9 \\ -9 & -13 & -1 \\ 7 & 24 & 15 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим линейные зависимости между строками данной матрицы, для этого транспонируем матрицу A:

$$B=A^T=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 2 & -9 & 7 \\ 2 & -6 & 11 & 9 & -13 & 24 \\ -1 & -4 & 8 & 9 & -1 & 15 \end{pmatrix}$$

Приведем матрицу B к главному ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 3 & 2 & -9 & 7\\ 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 10\\ 0 & -7 & 11 & 11 & -10 & 22\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -3 & 3 & 2 & -9 & 7\\ 0 & -7 & 0 & 0 & -21 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Получим матрицу B′:

$$B' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Строки матрицы B′ Получены из строк матрицы B с помощью линейных комбинаций. Таким образом, линейная оболочка, натянутая на векторы f1 f2 f3, содержит вектор c = (0 1 0 0 3 0), который удовлетворяет условиям задания.

Вектор c выражается линейно через Векторы f1 f2 f3, следующим образом:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ -3 & -6 & -4 & 1\\ 3 & 11 & 8 & 0\\ 2 & 9 & 9 & 0\\ -9 & -13 & -1 & 3\\ 7 & 24 & 15 & 0\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -7 & 1\\ 0 & 5 & 11 & 0\\ 0 & 5 & 11 & 0\\ 0 & 5 & -10 & 3\\ 0 & 10 & 22 & 0\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -7 & 1\\ 0 & 5 & 11 & 0\\ 0 & 5 & 11 & 0\\ 0 & 5 & 11 & 0\\ 0 & 10 & 22 & 0\end{pmatrix} \leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 5 & 11 & 0\\ 0 & 0 & -7 & 1\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 5 & 11 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/7\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1/7\\ 0 & 5 & 0 & 11/7\\ 0 & 0 & 1 & -1/7\end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -27/35\\ 0 & 1 & 0 & 11/35\\ 0 & 0 & 1 & -1/7\end{pmatrix}$$

Т.о. $c = -\frac{27}{35}f_1 + \frac{11}{35}f_2 - \frac{1}{7}f_3$

Критерии оценивания

14 баллов: обоснованный ответ о принадлежности указанного вектора оболочке, и обоснованный ответ каким образом он выражается через базис этой оболочки.

10 баллов: обоснованный ответ о том, что вектор с 2мя ненулевыми компонентами принадлежит оболочке.

1-7 баллов: описана попытка решения задачи, в которой есть частично корректные шаги, приближающие к решению.

5 баллов приведен пример с вектора, лежащего в оболочке и соответствующего требованиям условия задачи, без обоснования его нахождения.

0 баллов: решение отсутствует вовсе либо присутствует набор цифр и слов, к решению никак не приближающий.

ТРЕК «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА В ЭКОНОМИКЕ»

Задание 4 «Линейная алгебра»

Решение.

1. Легко проверить, что ранг матрицы XY есть 2. Поскольку ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей, ранг каждой из матриц X и Y равен 2.

2. Отсюда следует, что для некоторых матриц X^+ и Y^+ размеров 2×3 и 3×2 соответственно выполнено:

$$X^+X = YY^+ = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Тогда
$$YX = X^+XYXYY^+ = X^+(XY)^2Y^+.$$

4. Вычислим $(XY)^2$. Оказывается:

$$(XY)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -6 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = 3XY.$$

Отсюда
$$YX = X^+(XY)^2Y^+ = 3X^+XYY^+ = 3E.$$

Критерии.

1. Определены ранги матриц X и Y – 1,5 балла.

2. Установлен факт существования односторонних обратных для матриц X и Y – 2 балла.

3. Получена формула $YX = X^+XYXYY^+ = X^+(XY)^2Y^+$ – 1 балл.

4. Получена формула $(XY)^2 = 3XY$ – 2 балла.

5. Верно получен окончательный ответ – 0,75 балла.

(∗) Нерелевантный ответ (матрица не той размерности и т.п.) может быть оценен не более чем на утешительные 0,5 балла.

(∗∗) Если участник выбрал иной способ решения, его ответ оценивается в индивидуальном порядке.

Задание 5 «Математический анализ 1»

Ответ. -3.

Решение. Условия позволяют однозначно найти функцию f.

1. Из тождества $f(x+y) = f(x) + f(y) + yg(x)$ подстановкой $x = y = 0$ получаем $f(0) = 0$.

2. Используя этот факт и дифференцируемость функции f в нуле, получаем, что существует предел

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(y)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(0+y) - f(0)}{y} = f'(0).$$

   Обозначим $f'(0) = B$.

3. Покажем, теперь, что функция f дифференцируема в любой точке $x \in \mathbb{R}$, причем $f'(x) = B + g(x)$. Действительно, используя тождество $f(x+y) = f(x) + f(y) + yg(x)$, получаем:

$$f'(x) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(y)}{y} + g(x) = B + g(x). \qquad (*)$$

4. Меняя местами x и y в тождестве $f(x+y) = f(x) + f(y) + yg(x)$, получаем, что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$yg(x) = xg(y)$$

   Обозначим $g(1) = A$. Тогда, подставляя $y = 1$ в это равенство, получаем

$$g(x) = Ax. \qquad (**)$$

5. Теперь из соотношения $(*)$ получаем общий вид допустимой функции f:
$$f(x) = \frac{A}{2}x^2 + Bx + C,$$
где $C \in \mathbb{R}$. Поскольку $f(0) = 0$, сразу получаем $C = 0$. Итак,
$$f(x) = \frac{A}{2}x^2 + Bx, \qquad (***)$$

6. Если забыть про условия $f(1) = 2$ и $f(2) = 1$, то каждая такая функция нам подходит. Действительно, подставляем в тождество $f(x+y) = f(x) + f(y) + yg(x)$ выражения $(**)$ и $(***)$, получаем равенство
$$\frac{A}{2}(x+y)^2 + B(x+y) = \frac{A}{2}x^2 + Bx + \frac{A}{2}y^2 + By + Axy,$$
и убеждаемся, что оно выполняется при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

7. Для нахождения констант A и B используем условие $f(1) = 2$ и $f(2) = 1$:
$$\begin{cases} \frac{A}{2} + B = 2 \\ 2A + 2B = 1 \end{cases}$$
Получаем: $A = -3$, $B = \frac{7}{2}$. Значит,
$$f(x) = \frac{-3x^2 + 7x}{2}.$$

8. Для получения окончательного ответа вычисляем:
$$f(3) = -3.$$

Критерии.

1. Установлено значение функции f в нуле – 0,25 балла.
2. Установлена дифференцируемость функции f в каждой точке и соотношение $(*)$ – 3 балла.
3. Установлен общий вид функции g – 1 балл.
4. Установлен общий вид функции f – 1 балл.
5. Проверено, что все такие функции удовлетворяют условию (кроме значений функции f в точках 1 и 2) – 1 балл.
6. Использованы значения функции f в точках 1 и 2 и верно получен окончательный ответ – 1 балл.

$(*)$ Если участник выбрал иной способ решения, его ответ оценивается в индивидуальном порядке.

Задание 6 «Математический анализ 2»

Ответ: $\frac{\pi^2}{4}$.

Решение.

Вариант 1.

1. Выполним преобразование подынтегральной функции:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = -\int_0^{\pi} \frac{x d(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\int_0^{\pi} x d(\mathrm{arctg}(\cos x)) .$$

2. Далее используем формулу интегрирования по частям:

$$-x\, \mathrm{arctg}(\cos x)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \mathrm{arctg}(\cos x) dx = -\pi(-\frac{\pi}{4}) - 0 + I = \frac{\pi^2}{4} + I,$$

где $I = \int_0^{\pi} \mathrm{arctg}(\cos x) dx$.

3. Представим I как сумму интегралов на отрезках $[0, \pi/2]$ и $[\pi/2, \pi]$:

$$I = \int_0^{\pi/2} \mathrm{arctg}(\cos x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{arctg}(\cos x) dx.$$

И сделаем замену переменной $t = \pi - x$ во втором интеграле:

$$I = \int_0^{\pi/2} \mathrm{arctg}(\cos x) dx + \int_{-\pi/2}^{0} \mathrm{arctg}(-\cos t)(-dt) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{arctg}(\cos x) dx - \int_0^{\pi/2} \mathrm{arctg}(\cos t) dt = 0.$$

Таким образом получаем итоговый результат:

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4} + I = \frac{\pi^2}{4} + 0 = \frac{\pi^2}{4} .$$

Критерии.

1. Выполнено преобразование (пункт 1) – 1,25 балла.
2. Правильно использована формула интегрирования по частям (пункт 2) – 3 балла.
3. Приведено обоснование того, что I = 0 (пункт 3) – 3 балла.

(*) Нерелевантный ответ (безуспешное или ошибочное интегрирование по частям в лоб и т. п.) оценивается не более, чем в 0,5 балла.

1

(**) Если участник выбрал иной способ решения, его ответ оценивается в индивидуальном порядке.

Вариант 2.

1. Обозначим искомый интеграл как I и сделаем замену переменной $y = \pi - x$:

$$I \;=\; \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx \;=\; \int_\pi^0 \frac{(\pi-y)\sin(\pi-y)}{1+\cos^2(\pi-y)}d(\pi-y)\;.$$

2. Выполняем дальнейшие преобразования:

$$I \;=\; \int_\pi^0 \frac{(\pi-y)\sin(\pi-y)}{1+\cos^2(\pi-y)}d(\pi-y) \;=\; \int_0^\pi \frac{(\pi-y)\sin y}{1+\cos^2 y}dy \;=\; \pi\int_0^\pi \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}dy - \int_0^\pi \frac{y\sin y}{1+\cos^2 y}dy\;.$$

3. Замечаем, что второй интеграл совпадает с искомым, тогда можем выразить его следующим образом:

$$I \;==\; \pi\int_0^\pi \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}dy - I\;;$$

$$2I \;=\; \pi\int_0^\pi \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}dy\;.$$

4. Вычисляем оставшийся интеграл, например, с помощью замены переменной $t = \cos y$:

$$\pi\int_0^\pi \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}dy \;=\; -\pi\int_1^{-1}\frac{dt}{1+t^2} \;=\; -\pi\operatorname{arctg}(t)\Big|_1^{-1} \;=\; \pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) \;=\; \frac{\pi^2}{2}\;;$$

и получаем итоговый результат:

$$2I \;=\; \frac{\pi^2}{2} \to I \;=\; \frac{\pi^2}{4}\;.$$

Критерии.

1. Выполнена замена переменной (пункт 1) – 1,25 балла.

2. Выполнены необходимые преобразования для выражения искомого интеграла через известный («берущийся») интеграл (пункт 2) – 2 балла.

3. Понимание того, как можно выразить искомый интеграл I (пункт 3) – 2 балла

4. Правильно проведены вычисления и получен конечный ответ (пункт 4) – 2 балла.

(*) Нерелевантный ответ (безуспешное интегрирование в лоб, критические ошибки в пределах интегрирования и знаков на начальном этапе и т. п.) оценивается не более, чем в 0,5 балла.

(**) Если участник выбрал иной способ решения, его ответ оценивается в индивидуальном порядке.

Задание 7 «Математическая статистика 2»

Ответ: 12.18

Решение.

1. Обозначим координаты приземления Люмин как X_1, X_2, X_3, а координаты приземления Итера как Y_1, Y_2, Y_3. Тогда из условия нам известно, что

$$P\left(\frac{\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2}} > \frac{\rho}{4}\right) = 0.05\ .$$

2. Также из условия можно сделать вывод о том, что сумма квадратов координат имеет распределение хи-квадрат с 3 степенями свободы. Тогда можно возвести отношение расстояний в квадрат, в результате чего получим распределение Фишера (дисперсии у X и Y одинаковые, поэтому сократятся; степеней свободы тоже поровну, поэтому тоже сократятся):

$$P\left(\frac{X_1^2+X_2^2+X_3^2}{Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2} > \left(\frac{\rho}{4}\right)^2\right) = 0.05\ .$$

3. Квантиль распределения Фишера для $\alpha = 0.05$, $F_{0.05}(3,3) = 9.28$, то есть:

$$\left(\frac{\rho}{4}\right)^2 = 9.28 \to \rho = 12.18\ .$$

Критерии.

1. Формализовано условие задачи (пункт 1) – 1 балл.
2. Есть формулировка того, что сумма квадратов координат имеет распределение на хи-квадрат (пункт 2) – 2 балла.
3. Есть формулировка того,, что отношение расстояний в квадрате имеет распределение Фишера (пункт 2) – 2 балла.
4. Правильно определена квантиль распределения Фишера (пункт 3) – 2 балла.
5. Получен итоговый ответ (пункт 3) – 0,25 балла.

Задание 8 «Оптимизация»

Решение

1. Спецификация функции издержек

Решающего данную задачу не должно смущать наличие нескольких компонент в рецептуре продукта при точном соблюдении рецептуры и отсутствии потерь. На производство одного пирожка расходуется комплект сырья на три четверти состоящих муки и на одну четверть из мяса. При решении данной задачи можно рассматривать его, как обобщенное «сырье» для производства пирожков. Отметим также, что стоимость хранения одной партии муки в единицу времени составляет $\frac{3}{4}c_{21}$ рублей, а одной партии мяса — $\frac{1}{4}c_{22}$ рублей. Мы не будем менять обозначения для этих величин.

Поскольку в процессе производства потери веса не существенны, интенсивность потребления сырья оценивается по формуле $b = \frac{Nz}{\theta}$, где z — общий вес сырья для изготовления одного пирожка. Так как при изготовлении пирожков строго соблюдается рецептура, одна партия поставки сырья веса ‘n’ будет израсходована за время $T = \frac{n}{b}$. Таким образом, за время θ будет выполнено $k = \frac{\theta}{T} = \frac{Nz}{n}$ поставок. Стоимость одной поставки складывается из стоимости поставки муки и стоимости поставки мяса. Стоимость всех поставок определяется по формуле $C_1 = k(c_{11} + c_{12}) = \frac{Nz(c_{11}+c_{12})}{n}$.

Поскольку пополнение запасов осуществляется только при полном их исчерпании, наличие сырья в момент времени 't' определяется формулой $J(t) = n - bt$. Таким образом, издержки на хранение сырья за время его полного исчерпания составят $c_2 = (c_{21} + c_{22})\int_0^T (n - bt)dt = (c_{21} + c_{22})\int_0^T \left(n - \frac{n}{T}t\right)dt = (c_{21} + c_{22})\frac{nT}{2}$. За интервал времени θ стоимость хранения составит $C_2 = kc_2 = (c_{21} + c_{22})\frac{TNz}{2} = (c_{21} + c_{22})\frac{n\,\theta}{2}$.

В итоге, суммарные издержки при изготовлении пирожков за время θ составят $C(n) = C_1 + C_2 = \frac{Nz(c_{11}+c_{12})}{n} + \frac{(c_{21}+c_{22})\,\theta}{2}n$

2. Поиск оптимального веса партии поставки.

Следует найти минимум суммарных издержек при условии, что вес партии не превышает M кг. Несложно показать, что функция $C(n)$ имеет единственный глобальный минимум в точке $n_0 = \sqrt{\frac{2Nz(c_{11}+c_{12})}{(c_{21}+c_{22})\,\theta}}$. Таким образом, оптимальный вес одной партии поставки равен $n^* = min(M, n_0)$.

Критерии.

1. Спецификация функции издержек — 4 балла
2. Нахождение оптимального веса партии поставки — 3.5 балла

Задание 9 «Дифференциальные уравнения»

Критерии: полный балл ставился за абсолютное верное решение. За частично верное решение ставился промежуточный балл, зависящий от момента, до которого дошёл участник.

Solution

Let us make the following substitution: $y' = z = z\big(y(x)\big)$. Then $y'' = z'z$. We get

$$z'z = \frac{z}{\cos^2 y} \quad \iff \quad z = 0 \quad \text{or} \quad z' = \frac{1}{\cos^2 y}.$$

First, consider the case when $z = 0$:

$$z = 0 \quad \iff \quad y' = 0 \quad \iff \quad y = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

This function is a possible solution for initial equation. Let us check whether the initial conditions are fulfilled:

$$y(0) = c = 0 \quad \text{and} \quad y'(0) = 0 = 0.$$

So, $y = 0$ is the solution.

Now, consider the case when $z' = \frac{1}{\cos^2 y}$:

$$z' = \frac{1}{\cos^2 y} \quad \iff \quad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} \quad \iff \quad \int dz = \int \frac{dy}{\cos^2 y} \quad \iff \quad z = \operatorname{tg} y + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Let us apply initial conditions. As $y(0) = y'(0) = 0$, we get $c_1 = 0$. Then, $y' = \operatorname{tg} y$. We get

$$y' = \operatorname{tg} y \quad \iff \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} y \quad \iff \quad \int \frac{dy}{\operatorname{tg} y} = \int dx \quad \iff \quad \log|\sin y| = x + c_2 \quad \iff$$
$$\iff \quad \sin y = \pm\tilde{c}_2 e^x \quad \iff \quad y = \arcsin(\pm\tilde{c}_2 e^x),\ \tilde{c}_2 = e^{c_2},\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Applying initial condition, we get

$$y(0) = \arcsin(\pm\tilde{c}_2) = 0 \quad \iff \quad \tilde{c}_2 = 0.$$

So, again $y = 0$ is the solution.

Answer: $y(x) = 0$ is the only solution.

Задание 10 «Теория вероятностей»

Решение (приводится на русском языке)

1. Функция правдоподобия имеет следующий вид:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_X(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{\theta - x_i} = \exp\left(n\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

Заметим, что функция L возрастает по θ. Поскольку $x_i \geq \theta$ для любого наблюдения $i \in \{1, \ldots, n\}$, имеем, что $\min(x_1, \ldots, x_n) \geq \theta$. Поскольку θ ограничена справа, функция L достигает максимума в точке $\min(x_1, \ldots, x_n)$. Стало быть оценка максимального правдоподобия для параметра θ имеет вид

$$\hat{\theta}_n = \min(X_1, \ldots, X_n).$$

2. Оценка $\hat{\theta}_n$ является состоятельной оценкой параметра θ, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\big(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon\big) \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Найдем эту вероятность:

$$\mathbb{P}\big(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon\big) = \mathbb{P}(-\varepsilon \leq \hat{\theta}_n - \theta \leq \varepsilon) = \mathbb{P}(\theta - \varepsilon \leq \hat{\theta}_n \leq \theta + \varepsilon) = F_{\hat{\theta}_n}(\theta + \varepsilon) - F_{\hat{\theta}_n}(\theta - \varepsilon),$$

где $F_{\hat{\theta}_n}$ — функция распределения $\hat{\theta}_n$. Поскольку наименьшее значение $\hat{\theta}_n$ равно θ, имеем, что $F_{\hat{\theta}_n}(\theta - \varepsilon) = 0$. Тогда, замечая, что распределение выборки $X_1, \ldots, X_n$ является экспоненциальным, и пользуясь выражением для функции распределения минимума, имеем

$$F_{\hat{\theta}_n}(\theta + \varepsilon) = 1 - \left(1 - \big(1 - e^{\theta - (\theta + \varepsilon)}\big)\right)^n = 1 - e^{-n\varepsilon} \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, оценка $\hat{\theta}_n$ является состоятельной оценкой параметра θ.

Задание 11 «Статистика»

Решение (приводится на русском языке)

Вначале найдем значение неизвестного параметра p из условия, что

$$\sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi = x) = \sum_{x=1}^{\infty} xp^x = 1.$$

Поскольку $p \in (0, 1)$, имеем, что

$$\sum_{x=1}^{\infty} xp^x = \frac{p}{(p-1)^2} = 1.$$

Решая данное уравнения, получаем единственный корень такой, что $p \in (0, 1)$:

$$p = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Пусть теперь η — случайная величина, отражающая количество съеденных конфет с орешками. Применяя формулу полной вероятности, распишем искомую вероятность:

$$\mathbb{P}\big(\eta = 3 | \xi \in \{4, 5, 6, 7\}\big) = \frac{\sum_{x \in \{4,5,6,7\}} \mathbb{P}(\eta = 3 | \xi = x)\mathbb{P}(\xi = x)}{\sum_{x \in \{4,5,6,7\}} \mathbb{P}(\xi = x)}.$$

Остается заметить, что случайная $\eta | \xi = x$ имеет биномиальное распределение с параметрами x и 0.25. Тогда окончательно получаем следующее:

$$\mathbb{P}\big(\eta = 3 | \xi \in \{4, 5, 6, 7\}\big) = \frac{\sum_{x \in \{4,5,6,7\}} C_x^3 0.25^3 0.75^{x-3} xp^x}{\sum_{x \in \{4,5,6,7\}} xp^x} = 0.075, \text{ где } p = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

ТРЕК «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СОЦИОЛОГИИ»

Задание 12 «Дискриминация»
Критерии оценки:
1. Предложена общая модель для оценки эффекта гендерной дискриминации (регрессионная модель). Описаны существенные параметры этой модели (29-20 баллов).
2. Верно выбрана модель, но она недостаточно специфицирована (20-13 баллов).
3. Вместо общей модели предложен другой, менее эффективный подход (13-5 баллов).
4. Выбран неверный подход, но присутствуют осмысленные рассуждения (5-0 баллов).

Вопрос 13 «Пилотаж»
Критерии оценки:
1. Предложен оптимальный вариант решения с использованием коэффициента Альфа-Кронбаха и DP, проведены тестовые расчёты (29-20 баллов).
2. Предложено неоптимальное, но возможное решение, проведены соответствующие расчёты (20-10 баллов).
3. Рассуждения в верном направлении, но решения и расчётов нет или они неверные (10-0 баллов).

ТРЕК «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА В ИНЖЕНЕРИИ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ»

Задание 14 «ОДУ»

Решение:

Да, такое решение существует. Заметим, что все решения ЛОУ с постоянными коэффициентами бесконечно дифференцируемы (и даже являются квазимногочленами).

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \\ \dots \\ y^{(n-2)}(0) = 0, \\ y^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Она имеет притом единственное решение: обозначим его $\tilde{y}$. Заметим, что исходя из рассматриваемого ЛОУ,

$$\tilde{y}^{(n)}(0) = -a_{n-1}\tilde{y}^{(n-1)}(0) - \ldots - a_1\tilde{y}'(0) - a_0\tilde{y}(0) = -a_{n-1},$$

т. е. коэффициент a_{n-1} известен. Продифференцировав исходное ЛОУ, видим, что

$$\tilde{y}^{(n+1)}(0) = -a_{n-1}\tilde{y}^{(n)}(0) - \ldots - a_1\tilde{y}'(0) - a_0\tilde{y}(0) = (a_{n-1})^2 - a_{n-2}\tilde{y}^{(n-1)}(0)$$

и находим неизвестный коэффициент $a_{n-2} = (a_{n-1})^2 - \tilde{y}^{(n+1)}(0)$. Аналогично – последовательно дифференцируя ЛОУ – находим остальные коэффициенты.

Критерии проверки:

Верный ответ без объяснений – 0 баллов.

Выписаны верные формулы для решения линейного однородного уравнения по известным корням характеристического многочлена – 3 балла, неверные формулы – 0 баллов, выписан только характеристический многочлен по уравнению – 1 балл.

Используется идея о возможности дифференцирования исходного уравнения – 8 баллов.

Задание 15 «ТМО»

Определим следующие состояния рассматриваемой системы:

0 – оба прибор свободны

(1,0) – первый прибор занят, второй свободен

(0,1) – второй прибор занят, первый свободен

2 – оба прибора заняты

Определим случайный процесс $\xi\,(t)$ – состояние системы в момент времени t.

Почему $\xi\,(t)$ – однородный марковский процесс?

Для обоснования участнику достаточно было указать, что при фиксированном состоянии в момент времени t

- времена до изменения состояния определяются только номером состояния в момент t

- вероятности перехода (в момент скачка) также определяются только номером состояния в момент t и номером состояния, в которое система переходит в момент скачка.

Определим следующие экспоненциально (показательно) распределенные случайные величины:

θ – длина интервала между появлением последовательных заявок, $\theta \sim exp(4)$

η_1 – время обслуживания заявки первым прибором, $\eta_1 \sim exp(3)$

η_2 – время обслуживания заявки первым прибором, $\eta_2 \sim exp(1)$

Напомним, что по условию θ, η_1 и η_2 независимы.

Обозначим $\lambda = 4$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$.

Пусть $\xi\,(t) = 0$. Тогда время пребывания в состоянии 0 до скачка распределено так же, как θ (в силу свойства отсутствия памяти для экспоненциального распределения). В момент скачка процесс с вероятностью 1 перейдет в состояние (1,0).

Пусть $\xi\,(t) = (1,0)$. В момент скачка сл. процесс может перейти из состояния (1,0) либо в состояние 2, либо в состояние 0. Время пребывания в состоянии (1,0) до скачка распределено как минимум из θ и η_1, т.е. по экспоненциальному закону с параметром $\beta_{10} = \alpha_1 + \lambda = 7$. В момент скачка процесс с вероятностью $\alpha_1/\beta_{10} = 3/7$ перейдет в состояние 0 и с вероятностью $\lambda/\beta_{10} = 4/7$ в состояние 2.

Пусть ξ (t) = (0,1). В момент скачка сл. процесс может перейти из состояния (0,1) либо в состояние 2, либо в состояние 0. Время пребывания в состоянии (0,1) до скачка распределено как минимум из θ и η_2, т.е. по экспоненциальному закону с параметром $\beta_{01} = \alpha_2 + \lambda = 5$. В момент скачка процесс с вероятностью $\alpha_2/\beta_{01} = 1/5$ перейдет в состояние 0 и с вероятностью $\lambda/\beta_{01} = 4/5$ в состояние 2.

Пусть $\xi\,(t) = 2$. В момент скачка сл. процесс может перейти из состояния 2 либо в состояние (1,0), либо в состояние (0,1). Время пребывания в состоянии 2 до скачка распределено как минимум из η_1 и η_2, т.е. по экспоненциальному закону с параметром $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 = 4$. В момент скачка процесс с вероятностью $\alpha_2/\beta_2 = 1/4$ перейдет в состояние (1,0) и с вероятностью $\alpha_1/\beta_2 = 3/4$ в состояние (0,1).

Заметим, что время до скачка и вероятности перехода в момент скачка не зависят от t (вытекает из свойств экспоненциального распределения).

Таким образом, $\xi\,(t)$ – однородный марковский процесс.

Используя свойства экспоненциального распределения, имеем следующие формулы при $h \to 0$:

$$P\left(\xi\left(t+h\right)=\left(1,0\right)\,|\,\xi\left(t\right)=0\right)=\lambda h+o\left(h\right)=4h+o\left(h\right),$$

$$P\left(\xi\left(t+h\right)=2\,|\,\xi\left(t\right)=\left(1,0\right)\right)=\lambda h+o\left(h\right)=4h+o\left(h\right),$$

$$P\left(\xi\left(t+h\right)=0\,|\,\xi\left(t\right)=\left(1,0\right)\right)=\alpha_1 h+o\left(h\right)=3h+o\left(h\right)$$

$$P\left(\xi\left(t+h\right)=2\,|\,\xi\left(t\right)=\left(0,1\right)\right)=\lambda h+o\left(h\right)=4h+o\left(h\right),$$

$$P\left(\xi\left(t+h\right)=0\,|\,\xi\left(t\right)=\left(0,1\right)\right)=\alpha_2 h+o\left(h\right)=h+o\left(h\right)$$

$$P\left(\xi\left(t+h\right)=\left(1,0\right)\,|\,\xi\left(t\right)=2\right)=\alpha_2 h+o\left(h\right)=h+o\left(h\right)$$

$$P\left(\xi\left(t+h\right)=\left(0,1\right)\,|\,\xi\left(t\right)=2\right)=\alpha_1 h+o\left(h\right)=3h+o\left(h\right)$$

$$P\left(\xi\left(t+h\right)=0\,|\,\xi\left(t\right)=0\right)=1-4h+o\left(h\right),$$

$$P\left(\xi\left(t+h\right)=\left(1,0\right)\,|\,\xi\left(t\right)=\left(1,0\right)\right)=1-7h+o\left(h\right),$$

$$P\left(\xi\left(t+h\right)=\left(0,1\right)\,|\,\xi\left(t\right)=\left(0,1\right)\right)=1-5h+o\left(h\right),$$

$$P\left(\xi\left(t+h\right)=2\,|\,\xi\left(t\right)=2\right)=1-4h+o\left(h\right)$$

Матрица интенсивностей

$$Q=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Обозначим распределение вероятностей для рассматриваемого случайного процесса в установившемся или стационарном режиме через $\pi = (\pi_0, \pi_{10}, \pi_2, \pi_{01})$. Уравнение для стационарного распределения вероятностей $\pi Q = 0$. Отсюда находим

$$\pi_0 = \frac{9}{49}, \quad \pi_{10} = \frac{8}{49}, \ \pi_{01} = \frac{12}{49}, \ \pi_2 = \frac{20}{49}$$

Прибор 2 не занят в состояниях 0 и $(1,0)$, поэтому соответствующая вероятность равна $\pi_0 + \pi_{10} = \frac{17}{49}$.

Прибор 1 не занят в состояниях 0 и $(0,1)$, поэтому соответствующая вероятность равна $\pi_0 + \pi_{01} = \frac{21}{49}$.

Критерии оценивания:

14 баллов. Полное обоснованное решение. Определено пространство состояний. Обосновано марковское свойство. Выписаны интенсивности переходов. Выписано уравнение для стационарного распределения вероятностей. Верно вычислено стационарное распределение. Правильно определено, вероятности каких событий надо использовать для ответов в задаче. Получено 2 верных ответа (каждый верный ответ (вероятность) дает вклад 2 балла).

10 баллов. Определено пространство состояний. Обосновано марковское свойство. Выписаны интенсивности переходов. Выписано уравнение для стационарного распределения вероятностей. Верно вычислено стационарное распределение.

8 баллов. Определено пространство состояний. Обосновано марковское свойство. Выписаны интенсивности переходов. Выписано уравнение для стационарного распределения вероятностей.

6 баллов. Определено пространство состояний. Обосновано марковское свойство. Выписаны интенсивности переходов.

1-5 баллов. Есть некоторые идеи, определено пространство состояний, есть попытки обосновать марковское свойство.

0 баллов - нет ни одного верного ответа, решения нет, нет верных идей.

Задание 16 «Случайные процессы»

Решение:

Для наглядности сначала следует нарисовать граф вероятностей переходов.

1) Поскольку МЦ состоит из более, чем одного класса существенных состояний, то она не имеет предельного распределения.

2) Заметим, что так как состояние 1 несущественно, то в любом стационарном распределении $p = (p_1, \ldots, p_5)$ первая компонента $p_1 = 0$. Найдем стационарное распределение для каждого из двух существенных классов МЦ с множествами состояний $X^I = \{2{,}3\}$ и $X^{II} = \{4{,}5\}$.

$$(p_2, p_3) = (p_2, p_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, p_2 + p_3 = 1. \quad \text{Тогда} \quad p_2 = 1/2, p_3 = 1/2.$$

$$(p_4, p_5) = (p_4, p_5)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, p_4 + p_5 = 1. \quad \text{Тогда} \quad p_4 = 1/4, p_5 = 3/4.$$

В результате, множество стационарных распределений есть

$\Pi = \{\lambda p^1 + (1 - \lambda)p^2, \lambda \in [0{,}1]\} = \{\lambda(0{,}1/2{,}1/2{,}0{,}0) + (1 - \lambda)(0{,}0{,}0{,}1/4{,}3/4), \lambda \in [0{,}1]\}.$

Действительно, $(\lambda p^1 + (1 - \lambda)p^2)P = \lambda p^1 P + (1 - \lambda)p^2 P = \lambda p^1 + (1 - \lambda)p^2$ и $\sum_{i=1}^{5} \lambda p_i^1 + (1 - \lambda)p_i^2 = 1.$

Критерии оценивания

5 баллов: правильный ответ на первый вопрос с обоснованием.

7 баллов: ответ на первый вопрос и правильная система уравнений и неравенств для вычисления стационарных распределений.

10 баллов: ответ на первый вопрос и верное описание множества стационарных распределений.

Задание 17 «Численные методы»

Чтобы найти значение функции f при любых n необходимо рассмотреть рекуррентное соотношение

$$P_n = \frac{2y}{3}P_{n-1} + \frac{y^2}{3}P_{n-2}, \tag{0.1}$$

которое сводится к виду

$$P_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n, \tag{0.2}$$

где λ_1, λ_2 являются решениями характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \frac{2y}{3}\lambda - \frac{y^2}{3} = 0, \tag{0.3}$$

а константы C_1 и C_2 находятся из равенств

$$P_0 = x + 3, \quad P_1 = y(x-1), \tag{0.4}$$

откуда получим $\lambda_1 = y$, $\lambda_2 = -y/3$, $C_1 = x$ и $C_2 = 3$ и тогда

$$P_n = xy^n + 3(-y/3)^n = y^n(x + (-1)^n/3^{n-1}). \tag{0.5}$$

Вспомним, что мы работаем в 24 разрядной арифметике. Согласно условию $x = 10^{24}$. Рассмотрим более общий случай $x = 10^m$, m - натуральное число, $m \geq 23$. В 24 разрядной арифметике число 10^{23} имеет 24 значащих цифры слева от запятой (единица и 23 нуля). Верхняя граница ошибки округления равна 0,5. Таким образом в 24 разрядной арифметике выполняется приближенное тождество

$$10^{23} + \delta = 10^{23}, \quad |\delta| < 0,5. \tag{0.6}$$

Легко заметить, что $1/3^{n-1} < 1$ для $n > 1$, откуда согласно (0.6) получим, что в 24 разрядной арифметике при $m \geq 24$ и $n > 1$

$$P_n = 10^m y^n. \tag{0.7}$$

По условию задачи $y = 0,1$, поэтому

$$P_n = (0,1)^{n-m}. \tag{0.8}$$

Откуда

$$P_{100}/P_{101} = 10. \tag{0.9}$$

По условию задачи $y = 0,1$, поэтому

$$P_n = (0,1)^{n-m}. \tag{0.8}$$

Откуда

$$P_{100}/P_{101} = 10. \tag{0.9}$$

Можно сделать грубую оценку нижней границы значений n, при которых абсолютная погрешность округления не превышает $(0,1)^v$ с помощью вычисления верхней границы погрешности округления. Нетрудно сообразить, что число $(0,1)^{n-m}$ имеет $n-m-1$ нулей после запятой до единицы. Значащие цифры отсчитываются от первой ненулевой цифры слева, значит в арифметике с разрядностью t это число имеет еще t значащих цифр начиная с единицы. Следовательно минимальное натуральное n, при котором абсолютная погрешность округления не превышает $(0,1)^v$, находится из равенства

$$n - m - 1 + t = v. \tag{0.10}$$

Из условия задачи подставляя сюда $m = 24$, $t = 24$, $v = 2024$ легко находим $n \geq 2025$. При таких n значения погрешности удовлетворяют заданному условию, но это грубая оценка, сделанная с учетом максимальной погрешности округления, какая только может быть в данном случае.

Существует способ найти более точное значение n. Вычитая (0.7) из (0.5), найдем абсолютную погрешность

$$\Delta P_n = |y^n/3^{n-1}| \tag{0.11}$$

С учетом $y = 0,1$ потребуем, чтобы выполнялось условие

$$|(0,1)^n/3^{n-1}| \leq (0,1)^v, \tag{0.12}$$

Откуда

$$n \geq \frac{v + lg3}{1 + lg3}, \tag{0.13}$$

где $lg3$ – десятичный логарифм.

Задача делится на 2 части:

Часть 1 – Задача поиска числа, которое выведет код

Часть 2 – Задача поиска минимального n, при котором погрешность не превышает указанного значения

0 – студент даже не пытался решить задачу

1 – за попытку решить задачу

2 – за попытку в правильном направлении, если начало рассуждений правильное

3 – часть 1 выполнена не полностью, записано несколько правильных формул, но присутствуют несколько грубых принципиальных ошибок в самом подходе, который все равно не привел бы к успеху

4 – часть 1, записано несколько правильных формул, присутствует всего одна грубая принципиальная ошибка в самом подходе, который все равно не привел бы к успеху

5 – часть 1 выполнена не полностью, записаны все правильные формулы, но присутствуют несколько незначительных ошибок в численных расчетах, исправление которых привело бы к успеху

6 – часть 1 выполнена не полностью, записаны все правильные формулы, но присутствуют одна незначительная ошибка в численных расчетах, исправление которой привело бы к успеху

7 – часть 1 выполнена полностью, найдено число, которое должен вывести код, и дано правильное обоснование ответа, или правильно выведена явная зависимость функции f от n, но оставшуюся часть задачи студент решить даже не пытался или был выбран неверный подход, который не привел бы к успеху, не было высказано ни одного верного утверждения касательно 2 части

8 – есть попытка решить 2 часть и ход мыслей правильный, но допущена ошибка

9 – в решении 2 части сделана правильная, но грубая оценка значения n снизу

10 – задача решена полностью, все пункты выполнены

Задание 18 «Алгоритмы обработки данных»

Критерии оценивания:

10 баллов: представлен корректный алгоритм сложности не более O(N*M*(M+logN)) в среднем.

6-9 баллов: представлен корректный алгоритм сложности не выше, чем O(N*M*N*M) в среднем, либо при описании алгоритма имеются некритические ошибки.

1-5 баллов: представлен некорректный алгоритм, некоторые этапы которого верны.

Решение:

Шаг 1. Отсортируем каждый из M носителей алгоритмом сложности O(N*logN) – например, с помощью сортировки кучей (пирамидальной) или быстрой сортировкой. Итого, сложность шага O(M*N*logN).

Шаг 2. Разделим каждый носитель на 4-равные части и применим алгоритм сортировки слиянием попарно для каждой части с каждого носителя с каждой. Число сочетаний равно 4*M*(4*M-1)/2, сложность каждого слияния O(N). Таким образом, сложность шага O(M*M*N).