Статья для конкурса "Высший Пилотаж". Комбинаторные суммы с ограничениями на вычеты

Михаил Ларшин(Мика Нелимов)

2023 год

Содержание

1 Результаты работы

В статье рассмотрено выражение сумм полиномиальных коэффициентов, чисел размещений с ограничением на вычеты аргументов по модулю через их производящую функцию. Также рассмотрен общий случай выражения сумм последовательностей. Найдено обобщение для известного школьного тождества с биномиальными коэффициентами. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Для любого остатка r верно тождество:*

$$\sum_{n_1+2n_2+\dots+dn_d\equiv r \pmod d} \frac{n!}{n_1!\dots n_d!} = d^{n-1}$$

Обозначение.

$$W_m^r := \sum_{k\equiv r \pmod m} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Обозначение. $\vec{r} \in (\mathbb{Z}_m)^{d-1}$

$$W_m^{\vec{r}} := \sum_{\substack{n_1+\dots+n_d=n \\ (n_1,\dots n_{d-1})\equiv\vec{r} \pmod m}} \frac{n!}{n_1!\dots n_d!}$$

Обозначение. *В этой работе* $\xi := e^{\frac{2\pi i}{m}}$ *- первообразный корень*

Теорема 2.

$$W_m^r = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(1+\xi^k)^n\xi^{kr}$$

Теорема 3.

$$W_m^{\vec{r}} = \frac{1}{m^{d-1}}\sum_{\vec{k}\in(\mathbb{Z}_m)^{d-1}}(1+\xi^{k_1}+\dots+\xi^{k_{d-1}})^n\xi^{\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Теорема 4. *Для любой системы сравнений $\lambda(n_1,\dots n_d)$ вместе с тождеством $n_1+\dots+n_d=n$, разрешима в элементарных функциях от n сумма:*

$$\sum_{\lambda(n_1,n_2,\dots n_d)} \frac{n!}{n_1!\dots n_d!}$$

Обозначение. *Число размещений без повторений n элементов в k мест* $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Обозначение. $[x]$, $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$ - *ближайшее целое, ближайшее целое снизу, ближайшее целое сверху*

Также найдена серия тождеств.

$$\sum_{k=1}^{n} A_n^k = \lfloor en! \rfloor$$

$$\sum_{k} (-1)^k A_n^{n-2k} = [cos(1)n!]$$

$$\sum_{k} (-1)^k A_n^{n-(2k+1)} = [sin(1)n!]$$

Теорема 5.

$$\sum_{k \overset{m}{\equiv} r} A_n^k = \left\lfloor \frac{n!}{m} \sum_{k=0}^{m} e^{\xi^k} \xi^{-k(n-r)} \right\rfloor$$

И как обобщение нескольких тождеств приведена теорема использующая многомерное дискретное преобразование фурье. Для последовательности $a_{\vec{k}}$ с производящей функцией $f(x_1, \ldots x_d)$, тогда сумма аналогичная W_m^r выражается как:

$$\frac{1}{m^d} \sum_{\vec{k} \in (\mathbb{Z}_m)^{d-1}} f(\xi^{r_1}, \ldots \xi^{r_d}) \xi^{\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

2 Обобщение школьного тождества

Тождество которое рассмотрено здесь является одним из обобщений хорошо известного[1] из комбинаторики:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{2k} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{2k+1} + \cdots = 2^{n-1}$$

В следующем разделе будет рассмотрен другой способ обобщать это тождество.

Теорема 1. *Для любого остатка r верно тождество:*

$$\sum_{n_1 + 2n_2 + \cdots + dn_d \equiv r \pmod d} \frac{n!}{n_1! \ldots n_d!} = d^{n-1}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение:

$$d^n = (\underbrace{1+\dots+1}_{\text{d}})^n$$

Пронумеруем все единицы в каждой скобке. Выберем в $(n-1)$ скобках произвольные единицы которые будут перемножены при получении слагаемого, способов это сделать d^{n-1}. Обозначим n_i - количество единиц взятых с i-ой позиции.

Рассмотрим для слагаемого полученного при раскрытии произведения значение выражения $n_1 + 2n_2 + \dots + dn_d \equiv r - a \pmod d$ для некоторого a, тогда в последней n-ой скобке позиция выбираемой единицы однозначна a. Значит всего способов выбрать их d^{n-1}. С другой стороны сумма полиномиальных именно это количество способов считает.

□

Доказательство. Приведу другое доказательство. Сравнение

$$n_1 + 2n_2 + \dots + dn_d \equiv r \pmod d$$

делит полиномиальные коэффициенты $(n_1 ... n_d)$ на d классов эквивалентности ассоциированные с r. Используем известное[1] тождество

$$\frac{n!}{n_1! \dots n_d!} = \frac{(n-1)!}{(n_1-1)! \dots n_d!} + \dots + \frac{(n-1)!}{n_1! \dots (n_d-1)!}$$

Тогда полиномиальные коэффициенты от $(n-1)$ справа принадлежат каждому из классов эквивалентности. Также они не будут пересекаться, так как восстанавливаются однозначно. Значит это просто сумма всех полиномиальных коэффициентов от (n), что по полиному ньютона d^{n-1}.

□

Второе доказательство даёт понимание о том что это сравнение даёт барицентрические координаты равноотстоящих узлов в симплициальной сетке $(d-1)$-симплекса являющимся слоем d-симплекса Паскаля. Впрочем, это разбиение можно использовать и вне комбинаторного контекста. Примечательно то что среди всех сумм полиномиальных коэффициентов с ограничениями на вычеты эта сумма имеет наиболее простое выражение.

3 Сумма биномиальных коэффициентов

Сумма W_m^r является другим обобщением школьного тождества.

Теорема 2. *Для W_m^r можно найти формулу от n.*

Доказательство. Для нахождения W_m^r подставим в производящую функцию биномиальных коэффициентов все корни из 1, получим систему:

$$\begin{cases} (1+\xi^0)^n = W_m^0 + W_m^1 + W_m^2 + \dots + W_m^{m-1} \\ (1+\xi)^n = W_m^0 + \xi W_m^1 + \xi^2 W_m^2 + \dots + \xi^{m-1} W_m^{m-1} \\ (1+\xi^2)^n = W_m^0 + \xi^2 W_m^1 + \xi^4 W_m^2 + \dots + \xi^{2(m-1)} W_m^{m-1} \\ \vdots \\ (1+\xi^{m-1})^n = W_m^0 + \xi^{m-1} W_m^1 + \xi^{2(m-1)} W_m^2 + \dots + \xi^{(m-1)^2} W_m^{m-1} \end{cases}$$

Матрица этой системы оказывается частным случаем матрицы Вандермонда, матрицей Шура[9] $M = (\xi^{ij})$:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \xi & \xi^2 & \dots & \xi^{m-1} \\ 1 & \xi^2 & \xi^4 & \dots & \xi^{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi^{m-1} & \xi^{2(m-1)} & \dots & \xi \end{bmatrix}$$

Квадрат матрицы довольно просто устроен:

$$M^2 = \left(\sum_{k=1}^{m} \xi^{k(i+j)}\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} (\xi^{i+j})^k\right) = \left(\begin{cases} i+j=m : 1+\dots+1 = m \\ i+j \neq m : \frac{(\xi^{i+j})^m - 1}{\xi^{i+j}-1} = 0 \end{cases}\right) = mE_m$$

Это позволяет решить систему домножив на M:

$$\begin{bmatrix} W_m^0 \\ W_m^1 \\ \vdots \\ W_m^{m-1} \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} (1+\xi^0)^n \\ (1+\xi^1)^n \\ \vdots \\ (1+\xi^{m-1})^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W_m^0 \\ W_m^1 \\ \vdots \\ W_m^{m-1} \end{bmatrix} \mathrm{M}^2 = \begin{bmatrix} W_m^0 \\ W_m^1 \\ \vdots \\ W_m^{m-1} \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} (1+\xi^0)^n \\ (1+\xi^1)^n \\ \vdots \\ (1+\xi^{m-1})^n \end{bmatrix} M$$

Значит:

$$W_m^r = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} (1+\xi^k)^n \xi^{kr}$$

$\square$

4 Сумма полиномиальных коэффициентов

Для ограничений на вычеты последовательностей нескольких переменных я работаю с векторами-вычетами $(\mathbb{Z}_m)^{d-1}$, на которых сравнение определно как:

$$\vec{n} \equiv \vec{r} \pmod m \iff \begin{cases} n_1 \equiv r_1 \pmod m \\ \vdots \\ n_{d-1} \equiv r_{d-1} \pmod m \end{cases}$$

Вектора размерности $d-1$, потому что вычет последней переменной в силу $n = n_1 + \dots + n_d$ определяется однозначно.

Тогда d-номиальные суммы с ограничением на вычеты определяются так:

$$W_m^{\vec{r}} := \sum_{\substack{n_1+\dots+n_d=n \\ (n_1,\dots n_{d-1})\equiv\vec{r} \pmod m}} \frac{n!}{n_1!\dots n_d!}$$

Тогда для неё можно сформулировать аналогичное Теореме 2 утверждение

Теорема 3. *Для $W_m^{\vec{r}}$ можно найти формулу от n.*

Доказательство. Подстановка всех возможных комбинаций корней из 1 в производящую функцию полиномиальных коэффициентов аналогично теореме 2 даёт нам систему с матрицей похожей на матрицу Шура $M = (\xi^{\vec{i}\cdot\vec{j}})$, где $\vec{i}$ это запись числа i по модулю m^{d-1} в m-ичной системе счисления, а $\vec{i}\cdot\vec{j}$ скалярное произведение.

$$(1+\xi^{i_1}+\dots+\xi^{i_{d-1}})^n = W_m^{\vec{0}} \dots + W_m^{\vec{j}} \xi^{i_1 j_1+\dots+i_{d-1}j_{d-1}} + \dots + W_m^{\vec{-1}} \xi^{(-1)i_1+\dots+(-1)i_{d-1}}$$

Тогда также попробуем найти квадрат матрицы M, он окажется таким же простым. Обозначу в выкладках $\vec{x} = \vec{i}+\vec{j}$ для простоты:

$$M^2 = \left(\sum_{k=1}^{m^{d-1}} \xi^{\vec{j}\cdot\vec{k}} \xi^{\vec{k}\cdot\vec{i}}\right) = \left(\sum_{k=1}^{m^{d-1}} \xi^{\vec{k}\cdot\vec{x}}\right) = \left(\sum_{k=1}^{m^{d-2}} \xi^{\vec{k}\cdot\vec{x}} \sum_{k_1=1}^{m} \xi^{k_1 x_1}\right)$$

По формуле геометрической прогрессии:

$$\sum_{k_1=1}^{m} \xi^{k_1 x_1} = \begin{cases} m & \text{если } x_1 = 0 \\ \frac{(\xi^{x_1})^m - 1}{\xi^{x_1}-1} = 0 & \text{если } x_1 \neq 0 \end{cases}$$

Тогда при $x_1 = 0$

$$M^2 = \left(\sum_{k=1}^{m^{d-2}} \xi^{\vec{k}\cdot\vec{x}} \right)$$

Продолжая сворачивать суммы, получаем:

$$\mathrm{M}^2 = \left(\begin{cases} m^{d-1} & \text{если } \vec{x} = \vec{0} \\ 0 & \text{если } \vec{x} \neq \vec{0} \end{cases} \right)$$

Получаем условие на индексы $\vec{i} + \vec{j} = \vec{0} \Rightarrow m^{d-1} | i + j \Rightarrow i + j = m^{d-1}$, то есть:

$$M^2 = m^{d-1} E_{m^{d-1}}$$

Значит по аналогии с теоремой 2:

$$\begin{bmatrix} W_m^0 \\ W_m^1 \\ \vdots \\ W_m^{\vec{r}} \\ \vdots \\ W_m^{m^{d-1}-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^n \\ (1 + 1 + \dots + \xi)^n \\ \vdots \\ (1 + \xi^{k_1} + \dots + \xi^{k_{d-1}})^n \\ \vdots \\ (1 + \xi^{-1} + \dots + \xi^{-1})^n \end{bmatrix} M \frac{1}{m^{d-1}}$$

То есть сумма для d-номиальных коэффициентов:

$$W_m^{\vec{r}} = \frac{1}{m^{d-1}} \sum_{k=1}^{m^{d-1}} (1 + \xi^{k_1} + \dots + \xi^{k_{d-1}})^n \xi^{\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

□

Можно понять что формула для конкретного вектор-вычета даёт способ нахождения формулы для любых ограничений на вычеты.

Теорема 4. *Для любой системы сравнений $\lambda(n_1, \dots n_d)$ вместе с тождеством $n_1 + \dots + n_d = n$, разрешима в элементарных функциях от n сумма:*

$$\sum_{\lambda(n_1, n_2, \dots n_d)} \frac{n!}{n_1! \dots n_d!}$$

Доказательство. Всего возможных решений системы сравнений конечно, так как множество значений которые могут принимать переменные конечно. Для каждого решения системы можно применить теорему 3 и просуммировать.

□

Хотя метод нахождения таких сумм найден, но остаётся много неизвестного. Например сложно методом теоремы 4 доказать теорему 1. Остаётся открытым существуют ли ещё системы λ с таким изящным выражением суммы.

5 Сумма чисел размещений

Задача. *Пусть A_n^k число размещений n элементов по k местам без повторений. Найдите полное число размещений:*

$$\sum_{k=0}^{n} A_n^k$$

Решение. *Число эйлера представимо как бесконечная сумма:*

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_n^k = \frac{n!}{0!} + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!}$$

Тогда можно оценить выражение сверху и снизу:

$$0 < en! - \sum_{k=0}^{n} A_n^k = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots < \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + 1 - (1 - \frac{1}{n+2}) < 1$$

То есть:

$$\sum_{k=0}^{n} A_n^k < en! < \sum_{k=0}^{n} A_n^k + 1$$

Тогда:

$$\sum_{k=0}^{n} A_n^k = \lfloor en! \rfloor$$

Интересно рассматривать это тождество в паре с другим комбинаторным объектом, перестановки без не подвижных точек(беспорядки)[1], их число

$$P_n^* = \left[\frac{n!}{e} \right]$$

$$\sum_{k=0}^{n} A_n^k = \lfloor en! \rfloor$$

Формулы очень похожие, но связь видна только косвенная. Интересно придумать объяснение почему в комбинаторных формулах возникает объект континкуальной природы - число e.

Привожу следующие тождества без доказательств, так как доказываются они аналогично приведённым ранее:

$$\sum_k (-1)^k A_n^{n-2k} = [cos(1)n!]$$

$$\sum_k (-1)^k A_n^{n-(2k+1)} = [sin(1)n!]$$

$$\sum_k A_n^{2k} = \Big\lfloor \frac{n!}{2}(e + \frac{(-1)^n}{e}) \Big\rfloor$$

$$\sum_k A_n^{2k+1} = \Big\lfloor \frac{n!}{2}(e - \frac{(-1)^n}{e}) \Big\rfloor$$

Теорема 5.

$$\sum_{k \overset{m}{\equiv} r} A_n^k = \Big\lfloor \frac{n!}{m} \sum_k e^{\xi^k} \xi^{-k(n-r)} \Big\rfloor$$

6 Суммирование с ограничением на вычеты

В предыдущих суммах полиномиальных коэффициентов и чисел размещений можно заметить общую часть в доказательстве. Здесь я обобщу теоремы 2, 3, 5. Рассмотрим последовательность $a_{\vec{k}}$, где $\vec{k}$ - положительный целочисленный вектор размерности $(k_1, \dots k_d)$. Пусть мы знаем также производящую функция последовательности $a_{\vec{k}}$:

$$f(x_1, \dots x_d) = \sum_{\vec{k}}^{\infty} a_{\vec{k}} x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$$

Тогда верно

$$f(\xi^{r_1}, \dots \xi^{r_d}) = \sum_{\vec{k} \in (\mathbb{Z}_m)^{d-1}} W_m^{\vec{k}} \xi^{\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

И можно сформулировать теорему выражающую сумму с ограничением на вычеты через меньшую сумму с производящей функцией.

$$\sum_{\vec{k}\overset{m}{\equiv}\vec{r}} a_{\vec{k}} = \frac{1}{m^{d-1}} \sum_{\vec{k}\in(\mathbb{Z}_m)^{d-1}} f(\xi^{r_1},\dots\xi^{r_d})\xi^{\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

В сути своей этот процесс является применением многомерного обратного дискретного преобразованием Фурье к паре последовательностей $x_{\vec{r}} := W_m^{\vec{r}}$ и $X_{\vec{r}} := f(\xi^{r_1},\dots\xi^{r_d})$. При подставлении конкретных последовательностей позволяет нам получать результаты вроде теорем 2, 3, 5.

Благодарность за помощь в работе, ценные идеи и дискуссии: Г. Б. Шабату, Г.А. Мерзону, Кириллу Тихонову и Алексею Поздееву и клубу эксперементальной математики при МЦНМО.

Список литературы

[1] Виленкин - "Комбинаторика"1969

[2] Ричард Стенли - "Перечислительная Комбинаторика"1986

[3] Дональд Кнут, Роналд Грэхем, Орен Паташник - "Конкретная математика"1988

[4] Риордан - "Введение в комбинаторный анализ"1958

[5] A Granville - Arithmetic properties of binomial coefficients. I. Binomial coefficients modulo prime powers 1995

[6] oeis.org

[7] desmos.com

[8] geogebra.org

[9] https://mathworld.wolfram.com/SchurMatrix.html