РЕШЕТКИ МАКСИМАЛЬНЫХ АНТИЦЕПЕЙ

Хоменко Анастасия, Кеелус Милена
Научный руководитель: Александр Леонидович Попович

Октябрь 2022 - январь 2024

Введение

Теория решеток исследует естественные иерархии, возникающие в человеческой деятельности, имеет много приложений в алгебре (решетки подпространств, решетки подалгебр и т.д., см. книги [1], [3]) и информатике (решетки понятий, см книгу [2]). Решетка обладает частичным порядком, но кроме того алгебраическими операциями объединения и пересечения, что позволяет строить конструкции на смешении этих языков.

Данная работа посвящена исследованию свойств конструкции представления конечных решеток решетками максимальных антицепей. В первых двух главах приведены необходимые определения и примеры понятий из общей теории решеток: частично упорядоченного множества, решетки, антицепи и максимальной антицепи. Для нашего исследования важна известная теорема (см [4]) о том, что любая конечная решетка представима как решетка максимальных антицепей некоторого ч.у. множества. Это порождает вопросы о том, единственное ли такое представление (ответ: нет), какие из таких представлений «наиболее информативные».

В данной работе мы нашли некоторые свойства решеток максимальных антицепей ч.у. множеств, которые мы описываем и доказываем в третьей главе. Если высота ч.у. множества достаточно высока (больше 1), то в нем можно выделять подмножества максимальных антицепей, в некотором смысле «близкие» друг к другу. Данные подмножества образуют интервалы в решетке максимальных антицепей, а вся решетка распадается в «склеенную сумму» (определение будет дано ниже) таких интервалов, подобно одеялу сшитому из лоскутов.

С другой стороны, мы нашли метод, который позволяет построить по решетке такое ч.у. множество, у которого решетка максимальных антицепей изоморфна данной решетке, и которое обладает высотой больше 1, что уменьшает количество элементов в ч.у. множестве и дает дополнительную информацию о решетке. Работа над данной конструкцией продолжается.

Среди решеток выделяют класс дистрибутивных решеток, который играет значительную роль в теории решеток. Нам удалось показать, что всякая конечная дистрибутивная решетка является «склеенной суммой» решеток, изоморфных решеткам всех подмножеств множеств, причем вся информация об этой сумме может быть удобно получена из конструкции решетки максимальных антицепей подходящего ч.у. множества.

Все факты разделов 3.2 и 3.3 не упомянуты ни в какой известной нам литературе.

В работе рассматриваются только конечные ч.у. множества и решетки.

Содержание

1 Частично упорядоченное множество

Частично упорядоченное множество (далее ч.у. множество) - множество с заданным отношением порядка $\leqslant$, причем для любых x, y и z верно следующее:

1) $x \leqslant x$;

2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$;

3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.

Записи $x \leqslant y$ и $y \geqslant x$ считаются эквивалентными.

Примеры

1) Пусть $A(n)$ – множество чисел от 1 до n, а отношение $\leqslant$ есть отношение делимости, т.е. $x \leqslant y$ значит, что y делится на x.

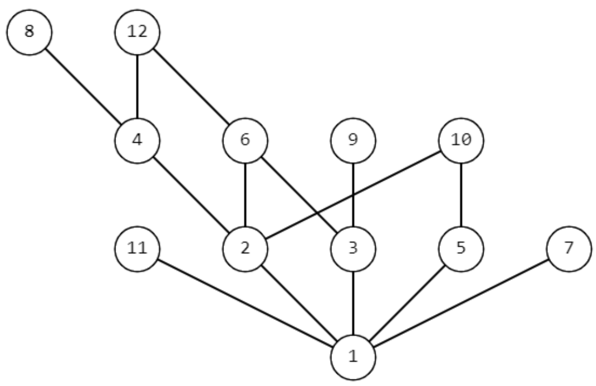
2) Пусть $B(I)$ состоит из всех подмножеств I, включая само I и $\varnothing$, а отношение $x \leqslant y$ это теоретико-множественное включение.

Далее в работе мы рассматриваем конечное ч.у. множество P.

Определим отношение $x < y$ (x *меньше* y): оно означает, что $x \leqslant y$ и $x \neq y$.

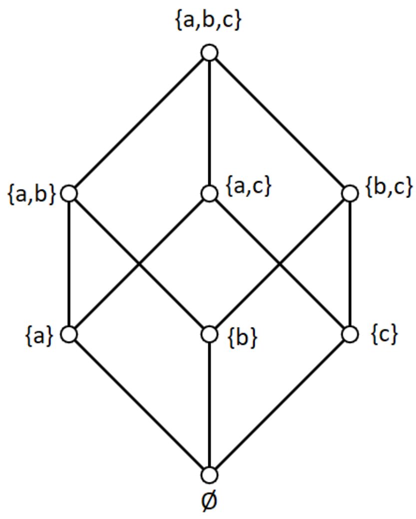
Определим отношение $x \succ y$ (x *покрывает* y): оно означает, что $y < x$, но не существует такого z, что $y < z < x$.

У конечного ч.у. множества можно нарисовать диаграмму, соединяя элементы отрезком, идущим сверху вниз от x к y, если $x \succ y$. Вот примеры некоторых таких диаграмм:

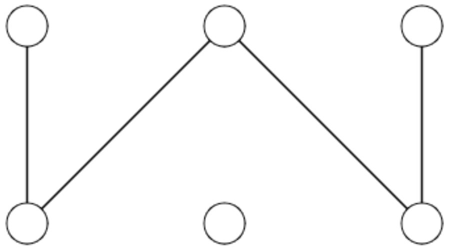


$A(12)$

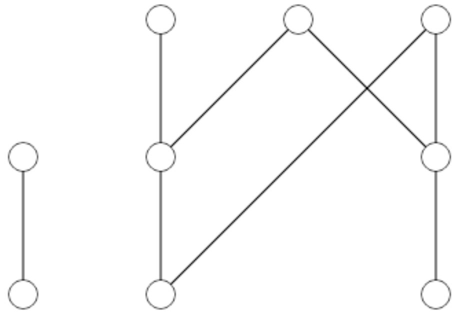
Элементы могут быть нарисованы на разной высоте, но при этом быть несравнимы: например, 11 и 4 или 7 и 8



$B(\{a, b, c\})$



В диаграмме ч.у. множества могут быть отдельные не связанные с остальными элементы...



или подмножества.

1.1 Грани

Элемент $a \in A \subseteq P$ называется *наибольшим* элементом множества A если $\forall x \in A : x \leqslant a$.

Элемент $a \in A \subseteq P$ называется *наименьшим* элементом множества A если $\forall x \in A : a \leqslant x$.

Верхней гранью подмножества $A \subseteq P$ называется элемент $a \in P$, такой что $\forall x \in A : x \leqslant a$.

Наименьшую верхнюю грань подмножества $A \subseteq P$, если она существует, будем называть *объединением* подмножества $A \subseteq P$ и обозначать через $\bigvee A$. Объединение двух элементов $x, y \in P$ будем обозначать как $x \vee y$.

Нижней гранью подмножества $A \subseteq P$ называется элемент $x \in P$, такой что $\forall a \in A : a \leqslant x$.

Наибольшую нижнюю грань подмножества $A \subseteq P$, если она существует, будем называть *пересечением* подмножества $A \subseteq P$ и обозначать через $\bigwedge A$. Пересечение двух элементов $x, y \in P$ будем обозначать как $x \wedge y$.

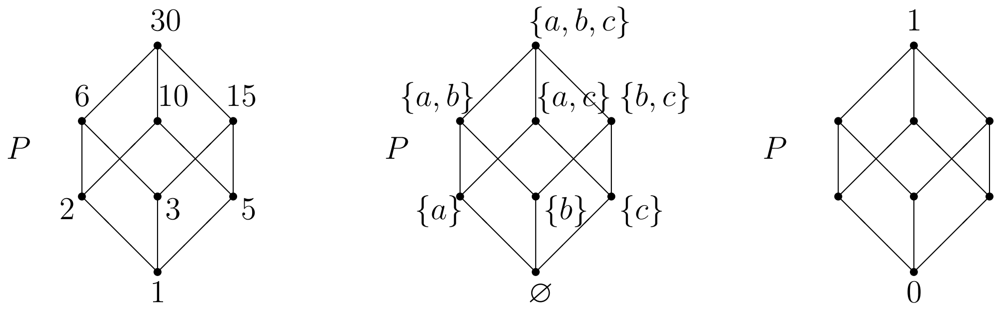
2 Решетки

Решеткой называется такое ч.у. множество, что любые два его элемента имеют объединение и пересечение.

В решетке можно взять объединение всех элементов – получится наибольший элемент этой решетки, который называется *единицей*. Единица считается пересечением пустого множества элементов решетки. Двойственно получается наименьший элемент, который называется *нулем*. Нуль считается объединением пустого множества элемента решетки.

Далее в работе мы рассматриваем конечную решетку L.

Подрешеткой решетки L называется подмножество L, замкнутое относительно операций пересечения и объединения.



Подмножество $\{1, 2, 3, 6\}$ – подрешетка. Объединение элементов 2 и 3 – элемент 6. Пересечение элементов 2 и 3 – элемент 1.

2.1 Операции

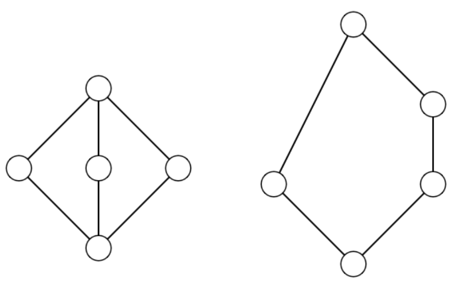
Следующие утверждения взяты из книги [1] (Глава 1.5).

Лемма 1. *Для операций $\wedge$ и $\vee$ в любой решетке для любых x, y, z верно:*
1) $x \vee x = x$ и $x \wedge x = x$
2) $x \vee y = y \vee x$ и $x \wedge y = y \wedge x$
3) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ и $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
4) $x \vee (y \wedge x) = (x \wedge y) \vee x = x$

Лемма 2. *В любой решетке верны тождества:*
1) $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
2) $x \wedge (y \vee z) \geqslant (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Решетка называется *дистрибутивной*, если в ней истинны следующие тождества для любых $x, y, z \in L$:
1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
Известно, что эти тождества между собой эквивалентны. (см. [3], глава 1)

Известно, что решётка является дистрибутивной тогда и только тогда, когда она не содержит подрешёток такого вида:

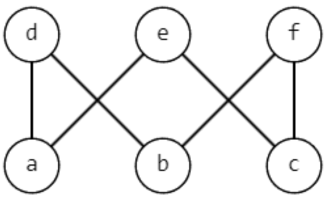


Важным примером дистрибутивных решеток являются решетки *замкнутых вниз* подмножеств ч.у. множеств. Рассмотрим подмножество $M \subseteq P$. Если для любых $m \in M$ и $x \in P$ из $x \leqslant m$ следует, что $x \in M$, то M называется *замкнутым вниз*.

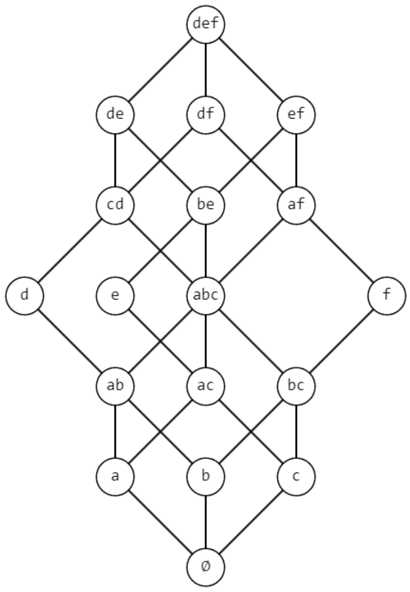
Множество всех замкнутых вниз подмножеств P образует дистрибутивную решётку $\mathrm{Down}\,P$ (относительно порядка теоретико-множественного включения). Более того, всякая дистрибутивная решетка изоморфна решетке $\mathrm{Down}\,P$, для подходящего P, в качестве которого можно взять множество элементов решетки, неразложимых в объединение (речь о них пойдет ниже). Доказательство этой теоремы приведено в книге [3] (глава 2). Таким образом, всякая конечная дистрибутивная решетка является подрешеткой в решетке всех подмножеств некоторого множества.

В дальнейшем на диаграммах $\mathrm{Down}\,P$ будут показаны максимальные элементы из всякого замкнутого вниз подмножества $M \subseteq P$.

Пример:



P



$\mathrm{Down}(P)$

Решетка всех подмножеств некоторого множества называется также *булеаном* этого множества. Число элементов в этом подмножестве называется *размерностью* булеана.

2.2 Интервалы

Для элементов a, b решетки L таких, что $a \leqslant b$, **интервалом [a, b]** будем называть подмножество $\{x \in L \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

Лемма 3. *Непустое пересечение интервалов – интервал.*

Доказательство. Рассмотрим интервалы $A = [a, b]$ и $B = [c, d]$ в решетке L.

1. Пусть в $A \cap B$ нет наибольшего элемента (для наименьшего доказательство строится аналогично). Рассмотрим максимальные элементы x и y. Пусть a – объединение x и y в A, а b – в B. Так как L – решетка, то $a = b$. Но тогда $a \in A \cap B$. Противоречие.

2. Пусть в $[a, b] \cap [c, d]$ есть такие x и y, что существует $z \in [a, b] \cup [c, d]$, такой что $x \geqslant z \geqslant y$. Тогда $b \geqslant x \geqslant z \geqslant y \geqslant b$, так как $x, y \in [a, b]$. Значит, z лежит в $[a, b]$. Аналогично z лежит в $[c, d]$.

Тогда $A \cap B$ – интервал. $\square$

Лемма 4. *Если три интервала решетки попарно пересекаются, то пересечение этих интервалов не пусто.*

Доказательство. Обозначим данные интервалы за A, B и C. Пусь $A = [a, m]$, $B = [b, k]$ и $C = [c, l]$. Пусть $[d, g] = A \cap B$, $[e, h] = B \cap C$ и $[f, i] = C \cap A$

Утверждение 1: Если три интервала попарно пересекаются, то ноль одного интервала сравним с единицей пересечения двух других.

Доказательство. Рассмотрим перечесение m и k: $g \leqslant m, g \leqslant k$, значит $g \leqslant m \wedge k$. Также $m \geqslant i \geqslant c$ и $k \geqslant h \geqslant c$, значит $c \leqslant m \wedge k$. Пусть c и g не сравнимы. Тогда ни одно из них не $m \wedge k$ т.к. среди них нет наибольшего. Тогда $k \geqslant m \wedge k > g$, а значит $m \wedge k \in B$. Аналогично $m \geqslant m \wedge k > g \geqslant d$, а значит $m \wedge k \in A$. Но тогда $m \wedge k \in A \cap B$ и $m \wedge k \geqslant g$. Но $g \not< m \wedge k$ по определению. Тогда $m \wedge k = g$. Тогда $m \wedge k = g \geqslant c$, противоречие. Значит, g и c сравнимы. Аналогично сравнимы b и i, a и h. ЧТД.

Утверждение 2: Если два интервала пересекаются, то объединение их нулей это нуль их пересечения.

Доказательство. $b \leqslant e$, $c \leqslant e$, значит $b \vee c \leqslant e$. Тогда $k \geqslant e \geqslant b \vee c \geqslant b$ и $l \geqslant e \geqslant b \vee c \geqslant c$, а значит $b \vee c \in B \cap C$. В силу того что $b \vee c \leqslant e$ и e – нуль $B \cap C$, $b \vee c = e$. Противоречие. Аналогично $a \vee c = f$ и $a \vee b = d$. ЧТД.

Утверждение 3: Если два интервала пересекаются, то пересечение их единиц это единица их пересечения.

Доказательство двойственно утверждению 2.

Из утверждения 1 сравнимы элементы b и i, h и c. Рассмотрим несколько случаев:

Случай 1: $b \geqslant i$. Тогда $g \geqslant b \geqslant i \geqslant c$, а значит $b \in A$. Также $L \geqslant h \geqslant b \geqslant i$, а значит $b \in C$. Тогда $b \in A \cap B \cap C$ и лемма верна.

Случай 2: $b \leqslant i$, $g \leqslant c$. Тогда $i \geqslant c \geqslant g$, а значит $c \in A$. Также $e \geqslant c \geqslant g$, а значит $c \in B$. Тогда $c \in A \cap B \cap C$ и лемма верна.

Случай 3: $b \leqslant i$, $g \geqslant c$ и $e \geqslant f$. Поскольку $b \vee c = e$ (см. утверждение 2), $i \geqslant b$ (см. утверждение 1) и $i \geqslant c$, то $i \geqslant e$. Тогда $i \geqslant e \geqslant f \geqslant a$, а значит $e \in A$. По определению $e \in B \cap C$. Тогда $e \in A \cap B \cap C$ и лемма верна.

Случай 4: $b \leqslant i$, $g \geqslant c$ и $f \geqslant e$. В этом случае $b \geqslant i \geqslant f \geqslant e \geqslant b$, значит выполняется равенство и лемма верна.

Случай 5: $b \leqslant i$, $g \geqslant c$ и f и e несравнимы. $i \geqslant b$ и $i \geqslant c$, а значит $i \geqslant e$. Заметим, что $f = a \vee c$ (см. утверждение 2), а $h = k \wedge l$ (см. утверждение 3). В силу того что $k \geqslant d \geqslant a, k \geqslant h \geqslant c, l \geqslant f \geqslant a, l \geqslant c$ мы получаем $k \geqslant a \vee c, l \geqslant a \vee c$, а значит и $k \wedge l \geqslant a \vee c$. Но тогда $e \leqslant h, e \leqslant i, f \leqslant h, f \leqslant i$ и f и e несравнимы, поэтому e ни f не $h \wedge i$, а значит $h \wedge i \geqslant f$ и $h \wedge i \geqslant e$. Тогда $h \geqslant h \wedge i \geqslant e$, то есть $h \wedge i \in B \cap C$. Также $i \geqslant h \wedge i \geqslant f$, то есть $h \wedge i \in A \cap C$. Тогда $h \wedge i \in A \cap B \cap C$ и лемма верна.

□

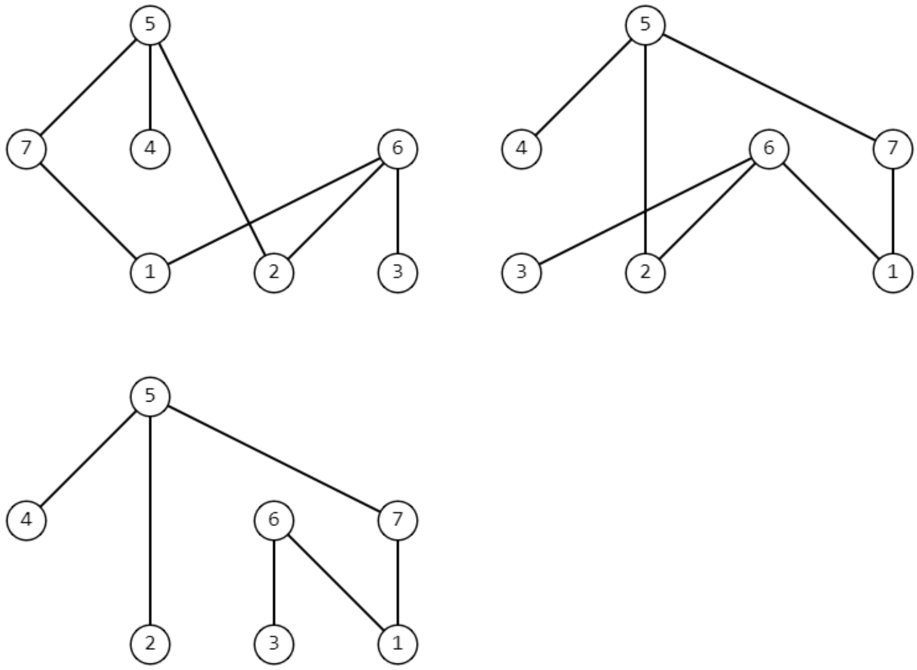
2.3 Изоморфизм

Ч.у. множества P и Q называются *изоморфными*, если существует биективное отображение $f : P \longrightarrow Q$ такое, что:

1) Если $x \leqslant y$, то $f(x) \leqslant f(y)$;

2) Если $f(x) \leqslant f(y)$, то $x \leqslant y$.

Например, два верхних ч.у. множества на рисунке ниже изоморфны друг другу, потому что можно так переименовать вершины, чтобы все отношения сохранялись. Третье ч.у. множество не изоморфно первым двум.



Определение изоморфизма для ч.у. множеств переносится и на решетки, при этом изоморфизм сохраняет операции объединения и пересечения.

2.4 Антицепи

Подмножество $A \subseteq P$ будем называть *антицепью*, если его элементы попарно несравнимы. Один элемент является антицепью, что иногда мы будем использовать без дополнительных обозначений. Антицепь $A \subseteq P$ называется *максимальной*, если всякий элемент из P сравним с некоторым элементом из A.

На множестве антицепей определим порядки:

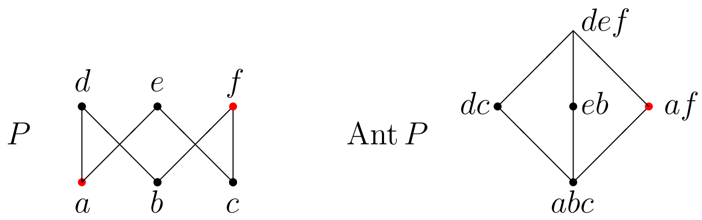
$A \leqslant B$, если для любого $a \in A$ существует $b \in B$ такой, что $a \leqslant b$.

$A \geqslant B$, если для любого $a \in A$ существует $b \in B$ такой, что $a \geqslant b$.

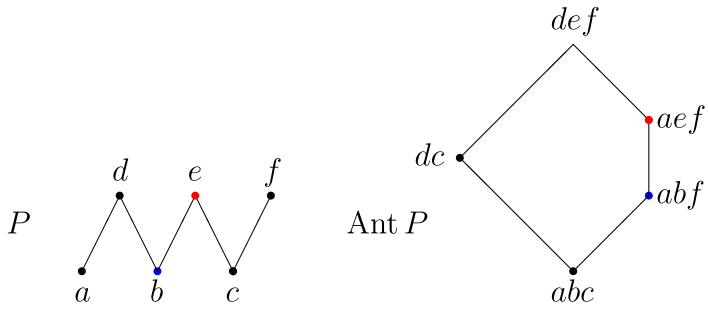
Отметим, что для произвольных антицепей из $A \geqslant B$ не следует $B \leqslant A$. Но если A максимальная, то следует. Поэтому на множестве максимальных антицепей $A \geqslant B$ влечет $B \leqslant A$.

Относительно вышеуказанного порядка максимальные антицепи ч.у. множества P образуют решетку (доказательство приведено ниже). Обозначим ее за $\operatorname{Ant} P$. Решетки максимальных антицепей также известны в литературе, см., например, [4].

Примеры



Красным показана антицепь af.



В антицепях aef и abf $a = a, f = f$ и $e > b$, поэтому $aef \geqslant abf$

2.4.1 Решетки максимальных антицепей

Теорема 1. *Максимальные антицепи конечного ч.у. множества образуют решетку.*

Доказательство. Пусть даны максимальные антицепи A и B. Введем следующие конструкции:

$A^B = \{x \in A | \quad \exists b \in B \quad x < b\}$;

$B^A = \{y \in B | \quad \exists a \in A \quad y < a\}$;

$A_B = \{x \in A | \quad \exists b \in B \quad x > b\}$;

$B_A = \{y \in B | \quad \exists a \in A \quad y > a\}$;

$AB = A \cap B$ (это обозначение преследует эстетические цели).

Заметим, что $A = A^B \cup AB \cup A_B$ и $B = B^A \cup AB \cup B_A$

Покажем, что множество $A^B \cup B^A \cup AB$ образует антицепь. Пусть найдутся такие $x \in A^B$ и $y \in B^A$, что $x > y$. Тогда найдется $b \in B$, такое что $b > x > y$, но B – антицепь. Противоречие. Аналогично для случая, когда $x < y$.

Множество $A^B \cup B^A \cup AB$ не обязано быть максимальной антицепью. Рассмотрим все несравнимые с ним элементы и среди них выделим максимальные, назовем это множество $A_* B$. Тогда множество $C = A^B \cup B^A \cup AB \cup A_* B$ будет уже максимальной антицепью.

Пусть $a \in A$, тогда либо $a \in A^B \cup AB \subseteq C$, либо $a \in A_B$, но тогда $a > b$, для некоторого b, и, очевидно, что $b \in B^A \subseteq C$. Следовательно, $A \leqslant C$. Аналогично $B \leqslant C$.

Пусть есть максимальная антицепь $D \leqslant A, D \leqslant B$. Пусть $d \in D$. Тогда либо $d \leqslant a$, где $a \in A^B \cup AB$, либо $d \leqslant b$, где $b \in B^A \cup AB$, либо d несравним с $A^B \cup B^A \cup AB$, и в таком случае $d \leqslant c \in A_* B$, поскольку $A_* B$ состоит из максимальных элементов, несравнимых с $A^B \cup B^A \cup AB$. В итоге $D \leqslant A^B \cup B^A \cup AB \cup A_* B = C$.

Тогда C – точная нижняя грань A и B.

Аналогично находится точная верхняя грань – $A_B \cup B_A \cup AB \cup A^*B$, где A^*B – множество минимальных элементов, несравнимых с $A_B \cup B_A \cup AB$. □

2.4.2 Близкие антицепи

Будем называть антицепи A и B *близкими*, если не существует $a \in A, b \in B$ и $z \in L$ таких, что $a > z > b$ или $b > z > a$.

Лемма 5. *Если $A, B, C \in \operatorname{Ant} P$ и B, C близки к A, то $B \wedge C$ и $B \vee C$ также близки к A.*

Доказательство. Рассмотрим максимальную антицепь A, и близкие к ней B и C.

В обозначениях предыдущего утверждения

$$B \wedge C = B^C \cup C_B \cup BC \cup B_*C$$

Пусть найдутся такие $d \in B \wedge C$ и $a \in A$, что $a > z > d$ для некоторого $z \in P$. Тогда $d \notin B^C \cup C_B \cup BC$ (так это элементы антицепей B и C, а они близки к A), следовательно, $d \in B_*C$. Тогда d – максимальный элемент, несравнимый с $B^C \cup C_B \cup BC$, следовательно, z с чем-то из этого множества сравним. Если $z \leqslant B^C \cup C_B \cup BC$, то $d \leqslant B^C \cup C_B \cup BC$, противоречие. Но если $z > B^C \cup C_B \cup BC$, это будет означать, что A не близка к B или к C.

□

Лемма 6. *Максимальные антицепи, близкие к максимальной антицепи A образуют интервал.*

Доказательство. Из предыдущего утверждения следует, что близкие к A антицепи образуют подрешетку. Докажем, что для близких к A максимальных антицепей B и C верно, что если максимальная антицепь X меньше B и больше C, то X близка к A.

Предположим что $x \in X$ не принадлежит ни одной из антицепей A, B и C. Тогда найдутся такие $b \in B$ и $c \in C$, что $b > x > c$. Так как x сравним с каким-то элементом $a \in A$ (иначе A– не максимальная), положим, $x > a$. Тогда $b > x > a$, и B не близка к A. Иначе, если $x < a$, то $a > x > c$ и C не близка к A. Противоречие. Значит, x принадлежит A, B или C. Тогда антицепь X близка к A. □

Через $A^\vee$ обозначим наименьшую близкую к A максимальную антицепь (которую можно получить как пересечение всех максимальных антицепей близких к A). Через $A^\wedge$ обозначим наибольшую близкую к A максимальную антицепь.

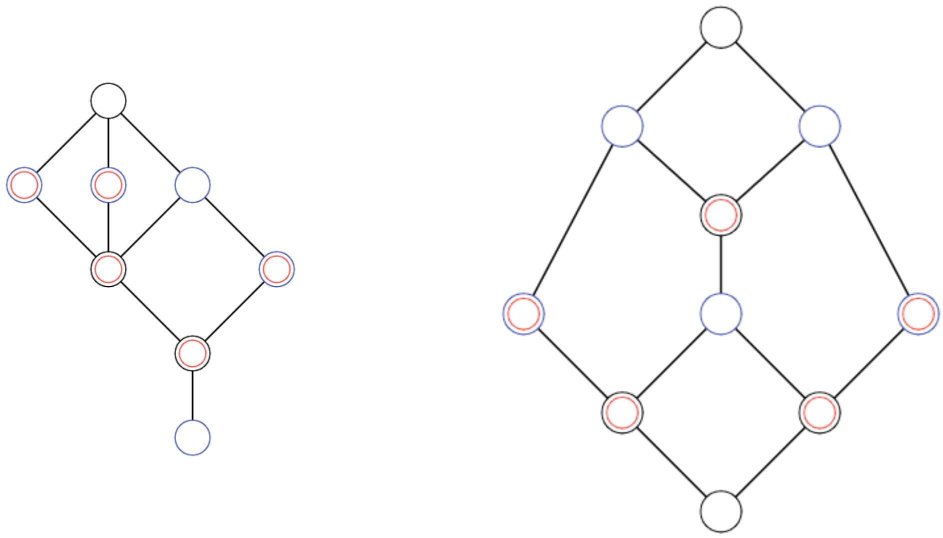
Далее мы изучаем представления решеток решетками максимальных антицепей. Несколько неизоморфных ч.у. множеств могут иметь изоморфные решетки максимальных антицепей, поэтому стоит вопрос о выборе «наиболее удачного» ч.у. множества P, для которого решетка $\operatorname{Ant} P$ изоморфна данной.

3 Описание решеток через ч.у. множества

3.1 Ч.у. множество неразложимых

Неразложимый в объединение элемент – ненулевой элемент, который нельзя представить в виде объединения двух отличных от него элементов ч.у. множества. Обозначим за $\mathrm{Ji}\, L$ множество неразложимых в объединение элементов решетки L.

Неразложимый в пересечение элемент – неединичный элемент, который нельзя представить в виде пересечение двух отличных от него элементов ч.у. множества. Обозначим за $\mathrm{Mi}\, L$ множество неразложимых в объединение элементов решетки L.



красным показаны неразложимые в объединение, синим - в пересечение

Пусть J_x – множество неразложимых в объединение элементов, меньших или равных $x \in L$. Пусть M_x – неразложимые в пересечение, большие или равные x.

Лемма 7. *В конечной решетке* $\bigvee J_x = x = \bigwedge M_x$.

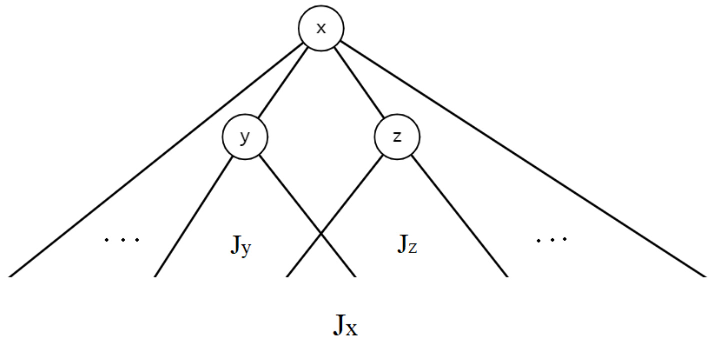
Доказательство. В силу двойственности, достаточно доказать, что $\bigvee J_x = x$.

Докажем утверждение по индукции по максимальной длине цепи решётки, причем длина считается по количеству ребер.

База индукции. Для $n = 1$ в решетке нет элементов, отличных от 0 и 1. Для $n = 2$ понятно, что любой элемент, отличный от 0 и 1, неразложим в объединие и в пересечение. Тогда утверждение индукции верно.

Шаг индукции. Пусть для n утверждение верно. Докажем для $n + 1$. Пусть элемент x неразложим в объединение. Пусть $x \succ y$ (напомним, что $x \succ y$ означает, что x покрывает y). Тогда $\bigvee J_x = \bigvee(J_y \cup x) = x$.

Пусть x разложим в объединение. Пусть y и z такие, что $y \vee z = x$. Понятно, что $J_x \wedge [0, y] = J_y$ и $J_x \wedge [0, z] = J_z$.По предположению индукции $\bigvee J_y = y$, $\bigvee J_z = z$. Тогда $x = y \vee z = \bigvee J_y \cup \bigvee J_z = \bigvee(J_y \cup J_z) \leqslant \bigvee J_x$. Но $x \geqslant j$ для всех $j \in J_x$, то есть $x \geqslant \bigvee J_x$. Тогда $\bigvee J_x = x$. $\square$



Следующая теорема хорошо известна (см. [3], [4]).

Теорема 2. *Всякая конечная решетка изоморфна решетке максимальных антицепей некоторого ч.у. множества.*

Доказательство. Пусть L – конечная решетка.

Пусть $J = \{\overline{a} | a \in \operatorname{Ji} L\}$, $M = \{\overline{\overline{a}} | a \in \operatorname{Mi} L\}$. Если $x \in \operatorname{Ji} L$ и $x \in \operatorname{Mi} L$, будем считать, что $\overline{a}$ и $\overline{\overline{a}}$ разные. Пусть $P = J \cup M$. Определим порядок на P:

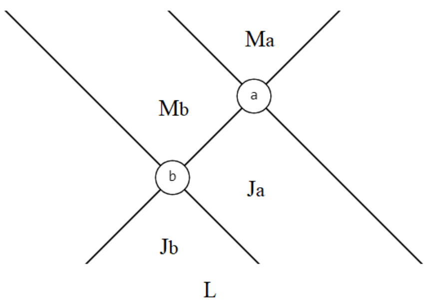
1. $\forall x \in P : \quad x \leqslant x$

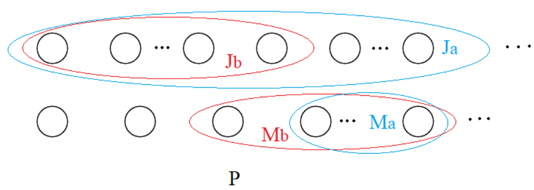
2. $\overline{\overline{x}} \geqslant \overline{y}$, если $\overline{\overline{x}} \in M$, $\overline{y} \in J$ и $x \nleqslant y$ в L

Рассмотрим отображение f, такое что $f(x) = \{y \in \operatorname{Ji} L \mid y \leqslant x\} \cup \{z \in \operatorname{Mi} L \mid z \geqslant x\}$. Любой элемент из $\{y \in \operatorname{Ji} L | y \leqslant x\}$ сравним с x, а значит, они не сравнимы между собой. Любой элемент из $\{z \in \operatorname{Mi} L | z \geqslant x\}$ сравним с x, а значит, они тоже не сравнимы между собой. Если $z \neq y$, то в P они не сравнимы. Тогда $f(x)$ – антицепь в P.

1. Докажем, что $f(x)$ максимальная антицепь. Пусть есть какой-то $p \in P$ не сравнимый с элементами этой антицепи. Пусть $p \in J$. Тогда $p \leqslant z$ в L $\forall z \geqslant x$. Тогда $p \leqslant \bigwedge M_x = x$. Но тогда $p \in J_x$. Противоречие. Для $p \in M$ рассуждения аналогичны.

2. Докажем, что если $a \geqslant b$, то $f(a) \geqslant f(b)$. Если $a \geqslant b$, то $J_a \geqslant J_b$, $M_a \leqslant M_b$. Так как $J_a \cup M_a$ – максимальная антицепь, в J_a найдутся элементы, большие элементов $M_b - M_a$, а элементы J_b у антицепей $J_a \cup M_a$ и $J_b \cup M_b$ общие в P. Тогда $f(a) = \{y \in \operatorname{Ji} L | y \leqslant a\} \cup \{z \in \operatorname{Mi} L | z \geqslant a\} = J_a \cup M_a \geqslant J_b \cup M_b = \{y \in \operatorname{Ji} L | y \leqslant b\} \cup \{z \in \operatorname{Mi} L | z \geqslant b\} = f(b)$.





3. Рассмотрим обратное отображение $g(A) = \bigvee J_A$ для антицепи $A = J_A \cup M_A$ в P. Тогда по лемме 7 имеем $g(A) = \bigvee J_A = \bigwedge M_A = A$. Тогда $g(A)$ – обратное отображение к $f(x)$. $\square$

3.2 S-склееная сумма

Пусть S и L – решетки, и каждому элементу $i \in S$ соответствует интервал $L_i \subseteq L$. Решетка L называется *S-склееной суммой* интервалов L_i, $i \in S$ если выполняются следующие условия:

1) $L = \bigcup_{i \in S} L_i$;

2) если $i, j \in S$ и $i \leqslant j$, то либо $L_i \cap L_j$ пусто, либо является интервалом в L, наименьший элемент которого лежит в L_j, а наибольший – в L_i;

3) если $i, j \in S$ и $i \prec j$, то $L_i \cap L_j$ непусто;

4) для любых $i, j \in S$ выполняется $L_i \cap L_j \subseteq L_{i \wedge j}$ и $L_i \cap L_j \subseteq L_{i \vee j}$.

Решетка S называется *скелетом* S-склеенной суммы. Интервалы L_i называются *слагаемыми* S-склеенной суммы.

Теорема 3. *Решетка максимальных антицепей* $\mathrm{Ant}\, P$ *является S-склеенной суммой интервалов близких антицепей* $[A^\vee, A^{\vee\wedge}]$ *по всем* $A \in \mathrm{Ant}\, P$ *со скелетом* $S = \{A^\vee | A \in \mathrm{Ant}\, P\}$.

Доказательство. Проверим выполнение всех условий из определения:

1) Покажем, что $A \in [A^\vee, A^{\vee\wedge}] = L_A$. Из определения $A \geqslant A^\vee$. Покажем, что $A \leqslant A^{\vee\wedge}$. Пусть $x \in A^\vee$. Тогда

a) Если $x \in A$, то либо $x \in A^{\vee\wedge}$, либо найдется такой элемент $a \in A^{\vee\wedge}$, что $x \prec a$, и все хорошо.

2) Если $\exists a \in A$, такое что $a \succ x$:

а) Если $\exists b \in A^{\vee\wedge}\quad b \succ a$, то $b \succ a \succ x$. Но тогда $A^{\vee\wedge}$ и $A^\vee$ не близки. Противоречие.

б) Если $\exists b \in A^{\vee\wedge}\quad a \succ b$, то $a \succ b \succ x$. Но тогда A и $A^\vee$ не близки. Противоречие.

Тогда $a \in A^{\vee\wedge}$.

2) 1. Для $i = j$ утверждение, очевидно, верно.

2. Пусть $A^\vee \succ B^\vee$. Тогда по пункту 3) $B^\vee$ и $A^{\vee\wedge} \in L_A \cap L_B$ и $L_A \cap L_B$ – интервал (по лемме 5), причем $A^{\vee\wedge}$ – его наибольший элемент, а $B^\vee$ – его наименьший элемент.

3. Пусть $A^\vee \geqslant B^\vee$ и $A^\vee \not\succ B^\vee$. Тогда $\exists x, \quad b \in B^\vee$ и $a \in A^\vee$, такие что $a > x > b$. Предположим, что $B^{\vee\wedge} \geqslant A^\vee$. Тогда $\exists y \in B^{\vee\wedge}$ такой что $y \geqslant a$. Но тогда $y \geqslant a > x > b$, и $B^\vee$ и $B^{\vee\wedge}$ не близки. Противоречие. Тогда $B^{\vee\wedge} < A^\vee$. Тогда $L_A \cup L_B = \varnothing$.

3) $A^\vee \prec B^\vee$ в S, значит $A^\vee \leqslant B^\vee$ в $\mathrm{Ant}\, L$. Пусть $B^\vee$ не близка к $A^\vee$. Тогда $\exists$ $a \in A, b \in B$ и $z \in \mathrm{Ant}\, L$ такие, что $b \geqslant z \geqslant a$. Тогда $A^\vee \leqslant B^{\vee\vee} \leqslant B^\vee$. Но тогда в S $B^\vee \geqslant B^{\vee\vee} \geqslant A^\vee$, а значит $B^\vee \not\succ A^\vee$. Противоречие.

Значит $B^\vee$ близка к $A^\vee$ и содержится в $[A^\vee, A^{\vee\wedge}]$. Тогда $B^\vee \in L_A \cap L_B$

4) Рассмотрим $X \in [A^\vee, A^{\vee\wedge}] \cap [B^\vee, B^{\vee\wedge}]$. X близка к $A^\vee$ и $B^\vee$ и $X \geqslant A^\vee$ и $X \geqslant B^\vee$. Рассмотрим $A^\vee \cap B^\vee$. $X \geqslant A^\vee \cap B^\vee$.

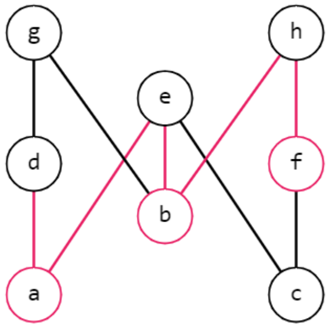
Пусть X и $A^\vee \cap B^\vee$ не близки. Из того что X близка к $A^\vee$ и $B^\vee$ следует, что не существует $x \in X, a \in A^\vee, b \in B^\vee, z \in L$ таких, что $x \geqslant z \geqslant a$ и $x \geqslant z \geqslant b$, и раз X и $A^\vee \cap B^\vee$ не близки, то $\exists x \in X, c \in C$, где С – элементы, которые входят в пересечение A и B, но не принадлежат ни A, ни B, $z \in L$ такие, что $x > z > c$. Раз z не входил в антицепь $A^\vee$, $\exists a \in A$ такой, что $z > a$. Но тогда $x > z > a$, а значит X и $A^\vee$ не близки. Противоречие. Значит X и $A^\vee \cap B^\vee$ близки.

Раз $X \geqslant A^\vee \cap B^\vee$. и X и $A^\vee \cap B^\vee$ близки, $X \in [A^\vee \cap B^\vee, (A^\vee \cap B^\vee)^\wedge]$

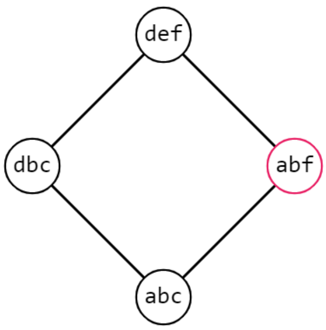
Для условия $L_i \cap L_j \subseteq L_{i \vee j}$ рассуждения аналогичны. $\square$

Пример:

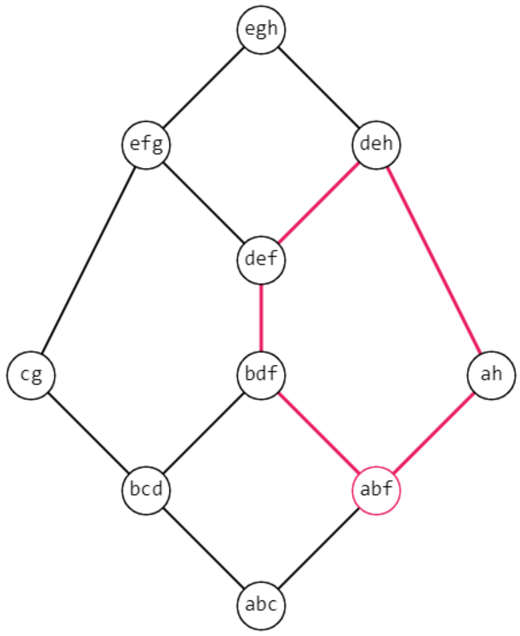
Красным показаны интервал $[abc, def] = [A^{\vee}, A^{\vee\wedge}]$ в P и соответствующие ему интервал в $\operatorname{Ant} P$ и элемент в скелете S.



чум P



скелет S



$Ant(P)$

Далее мы по решетке L построим ч.у. множество Q такое, $\operatorname{Ant} Q \cong L$ и что если L разложимо в склеенную сумму, то высота Q будет больше 1. В случае, когда L неразложима в склеенную сумму, Q будет изоморфным ч.у. множеству неразложимых из главы 3.

Интервал $[a, b]$ в решетке L назовем **правильным**, если выполняются следующие условия:

1) если $c \in L$ несравним с a, то $b \geqslant c$,

2) если $c \in L$ несравним с b, то $a \leqslant c$.

Нетрудно видеть, что для правильности интервала достаточно требовать только одного из этих условий.

Лемма 8. *Пусть $[a, b]$ и $[c, d]$ – правильные интервалы. Тогда либо они пересекаются, либо $a < c$ и $b < d$, либо $a > c$ и $b > d$.*

Доказательство. Предположим, что a и c несравнимы. Тогда по определению правильных интервалов $b > c$ и $d > a$. Рассмотрим $a \vee c$. Очевидно, что $b > a \vee c > a$, а значит $a \vee c \in [a, b]$ и что $d > a \vee c > c$, а значит $a \vee c \in [c, d]$. Это значит что $a \vee c \in [a, b]$ и $a \vee c \in [c, d]$. А значит $a \vee c \in [a, b] \cap [c, d]$.

Если a и c сравнимы, то без ограничения общности, $a > c$. Тогда посмотрим на отношение a и d. Если $d > a$, то $a \in [c, d]$, а значит $a \in [a, b] \cup [c, d]$. Если a и d несравнимы, то по определению правильных интервалов $b > d$.

$\square$

Каждый элемент решетки является нижним концом какого-нибудь правильного интервала. Действительно, достаточно просто рассмотреть все несравнимые с ним элементы и взять верхнюю грань этих элементов (например, их объединение). Двойственно, каждый элемент является и верхним концом какого-нибудь правильного интервала.

Рассмотрим множество Q состоящее из следующих интервалов:

- для каждого $j \in \operatorname{Ji} L$ выберем правильный интервал $[j, j']$, где j' - объединение j и элементов, неасравнимых с j;

- для каждого $m \in \operatorname{Mi} L$ выберем правильный интервал $[m', m]$, где m' - пересечение m и элементов, несравнимых с m.

Лемма 9. *Если $x \in L$ и j - максимальный в J_x, то $x \in [j, j']$. Если $x \in L$ и m - минимальный в M_x, то $x \in [m', m]$.*

Доказательство. Для доказательство первого утверждения достаточно показать, что $x \leqslant j'$. По определению, j' - объединение j и несравнимых с ним элементов. Рассмотрим максимальные элементы из J_x. Они несравнимы с j. По лемме 7 их объединение с $j - x$, а значит $x \leqslant j'$. Второе утверждение докавывается двойственно. □

Определим на Q порядок: $[a, b] > [c, d]$, если $a > c$ и $b > d$. Заметим, что несравнимые интервалы по лемме 4 должны пересекаться.

Теорема 4. $\operatorname{Ant} Q \cong L$.

Доказательство. Определим отображение $f : L \to \operatorname{Ant} Q$ следующим образом: $f(x)$ есть множество всех интервалов, содержащих элемент $x \in L$. Заметим, что в силу пересечения, все интервалы должны быть несравнимы в Q. С другой стороны, если есть интервал, который несравним со всеми интервалами из $f(x)$, то он должен с ними со всеми пересекаться. По Лемме 4 они все должны иметь общее пересечение, а это x. Следовательно, $f(x)$ это максимальная антицепь.

Пусть x, y различные элементы. Тогда, так как $J_x \neq J_y$, то либо существует максимальный j в J_x такой, что $y \not\geqslant j$, либо существует максимальный j в J_y такой, что $x \not\geqslant j$ В первом случае интервал $[j, j']$ содержит x по лемме 9, но не содержит y, а значит антицепи $f(x)$ и $f(y)$ различные. Во втором случае, интервал $[j, j']$ содержит y по той же лемме, но не содержит x, а значит антицепи $f(x)$ и $f(y)$ различные.

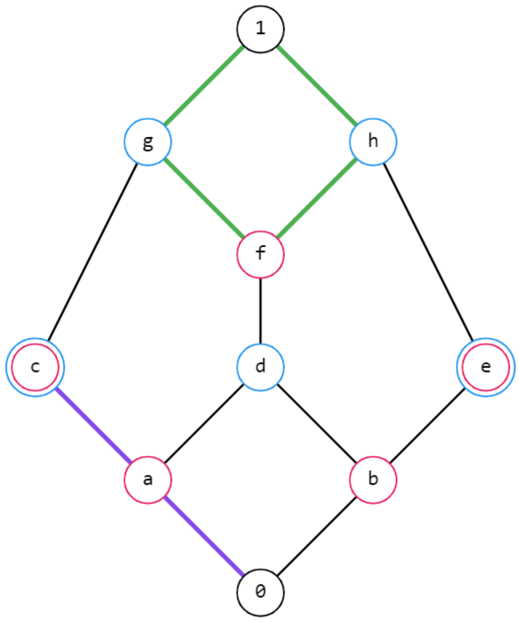
Пусть есть максимальная антицепь в Q, по Лемме 4, интервалы, ее составляющие, имеют общее пересечение. Заметим, что если в этом пересечении есть два элемента $y > x$, то найдется $j \in JiL$ такой, что $y \geqslant j$, но $x \not\geqslant j$. Тогда интервал $[j, j']$ содержит y и не содержит x. Тогда он не входил в максимальную антицепь, но несравним с ее элементами. Противоречие. Значит пересечение антицепи имеет ровно один элемент. Очевидно, что образом этого элемента и будет наша антицепь.

Покажем, наконец, что при $y > x$ выполняется $f(y) > f(x)$. Вначале будем считать, что $y \succ x$. Для некоторых $j \in \operatorname{Ji} L$ и $m \in \operatorname{Mi} L$ будет верно, что $[j, j']$ содержит y, но не x, а $[m', m]$ содержит x, но не y. Если j и m' несравнимы, то интервалы $[j, j']$ и $[m', m]$ пересекаются в элементе, скажем, z. Очевидно, что $z > x$ и $z < y$, но это противоречит тому, что $y \succ x$. Значит j и m' сравнимы, но тогда $m' > j$ (иначе $x > j$, чего быть не может). Двойственно получаем $m > j'$, откуда по определению $f(y) > f(x)$.

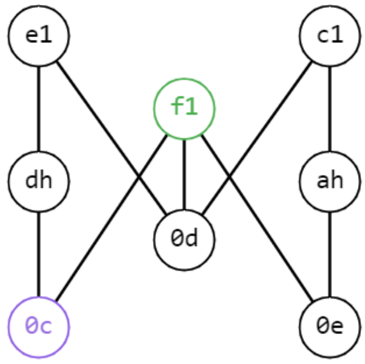
В итоге f – изоморфизм. □

Пример:

Красным и голубым показаны элементы неразложимые в объединение и пересечение соответственно. Зеленым и фиолетовым показаны правильные интервалы в L и соответствующие им элементы в Q.



решетка L



чум Q

3.3 Разложение дистрибутивных решеток в S-склееную сумму булевых решеток

Напомним, что мы называем булеанами решетки всех подмножеств множеств (число элементов в этом множестве называется *размерностью* булеана), в то время как конечные дистрибутивные решетки можно охарактеризовать как произвольные подрешетки булеанов.

Лемма 10. *Интервал булеана множества изоморфен булеану некоторого множества.*

Доказательство. Интервал $[a, b]$ булеана изоморфен решетке всех подмножеств множества $b \backslash a$. $\square$

Хорошо известно, что конечная дистрибутивная решетка L изоморфна решетке $\operatorname{Down} \operatorname{Ji} L$ (см [3], глава 2). Отметим, что каждое замкнутое вниз множество полностью определяется антицепью своих максимальных элементов.

Для антицепи $A \in \operatorname{Ant} \operatorname{Ji} L$ определим

$$A^* = \{x \in \mathrm{Ji} : \forall a \in \text{ либо } x \prec a, \text{ либо } x \text{ и } a \text{ несравнимы}\}.$$

В общем случае A^* является антицепью, но необязательно максимальной.

Лемма 11. *Пусть даны элемент a из антицепи A и элемент b такой, что $b < a$. Тогда $\exists a^* \in A^* : b \leqslant a^*$.*

Доказательство. Так как $b < a$, не существует элемента $c \in A$, такого что $c \geqslant b$, так как тогда $a > b > c$ и A – не антицепь. То есть b меньше или несравним с любым элементом из A. Среди цепей b до каждого из элементов A рассмотрим максимальную по числу элементов цепь Z от b до некоторого $c \in A$. Тогда элемент, в этой цепи, покрываемый элементом c, принадлежит A^*, иначе нашлась бы цепь длинее Z. Тогда, так как в Z есть хотя бы два элемента (c и b), этот элемент больше или равен b. $\square$

Очевидно, что $A^* \leqslant A$. Антицепи $A \in \operatorname{Ant}\operatorname{Ji} L$ поставим в соответствие интервал $[A^*, A]$.

Теорема 5. *а) Всякая конечная дистрибутивная решетка L является S-склеенной суммой, в которой*

- скелетом является решетка $S = \operatorname{Ant}\operatorname{Ji} L$;

- слагаемые изоморфны интервалам $L_A = [A^*, A]$ в решетке $\operatorname{Down}\operatorname{Ji} L$ для всех максимальных антицепей $A \in \operatorname{Ant}\operatorname{Ji} L$.

б) Каждый интервал L_A в этой S-склеенной сумме изоморфен булеану множества A.

в) Если $A \cap B$ непусто, то пересечение двух интервалов L_A и L_B в L изоморфно булеану множества $A \cap B$. Если $A \cap B$ пусто и A и B близки, то $L_A \cap L_B$ состоит из одного элемента. Если $A \cap B$ пусто и A и B не близки, то $L_A \cap L_B$ не содержит ни одного элемента.

Доказательство. Напомним, что $L \cong \operatorname{Down}\operatorname{Ji} L$.

Для начала проверим все условия из определения S-склеенной суммы.

1. Покажем, что $\operatorname{Down}\operatorname{Ji} L = \bigcup_{A \in \operatorname{Ant}\operatorname{Ji} L} L_A$. Рассмотрим антицепь $C \in \operatorname{Down}\operatorname{Ji} L$. Если она максимальная, то $C \in L_C$. Пусть она не максимальная. Рассмотрим ч.у. множество элементов не сравнимых ни с одним из элементов C. Дополним C минимальными элементами этого ч.у. множества. Назовем полученную (максимальную) антицепь B. Покажем, что $C \in [B^*, B] = L_B$.

Поскольку C – подмножество B, в решетке $\operatorname{Down}\operatorname{Ji} L$ имеем $C < B$. Пусть $b^* \in B^*$, что означает, что $b^* \prec b$ для какого-то $b \in B$. Если $b \in C$, то мы получаем $b^* < b \in C$, а если $b \in B/C$, то b^* меньше некоторого элемента из C в силу минимальности элемента b в ч.у. множестве элементов не сравнимых с элементами из C. Тогда $B^* < C$. В итоге $C \in [B^*, B]$.

2. Покажем, что если $I, J \in \operatorname{Ant}\operatorname{Ji} L$ и $I \leqslant J$, то либо $L_I \cap L_J = \varnothing$ либо $L_I \cap L_J$ - интервал $[J^*, I]$.

Если $I \leqslant J$, то $I^* \leqslant J^*$. Действительно, для любого $i^* \in I^*$ имеем $i^* \prec i$ для некоторого $i \in I$, а для i найдется $j \in J$, такой, что $i \leqslant j$. Тогда по лемме 11 существует $j^* \in J^*$ такой, что $i^* \leqslant j^*$.

Знаками $\sqcup$ и $\sqcap$ будем обозначать объединение и пересечение соответственно элементов I и J в $\operatorname{Down}\operatorname{Ji} L$.

Если $L_I \cap L_J \neq \varnothing$, то по формуле пересечения интервалов

$$L_I \cap L_J = [I^*, I] \cap [J^*, J] = [I^* \sqcup J^*, I \sqcap J] = [J^*, I].$$

3. Покажем, что если $I, J \in \operatorname{Ant}\operatorname{Ji} L$ и $I \prec J$, то $L_I \cap L_J$ непусто. Если $I \prec J$, то I и J близкие максимальные антицепи. Тогла I состоит из всех таких элментов

i, что для любого $j \in J$: либо $j \succ i$, либо $j = i$, либо j несравним с i. В своб очередь, J^* состоит из таких элментов j^*, что для любого $j \in J : j \succ j^*$ или j несравним с i. Тогда верно, что $J^* \leqslant I$. Тогда $I \in [J^*, J]$.

4. Покажем, что

$$L_I \cap L_J = [I^* \sqcup J^*, I \sqcap J] \subseteq [(I \wedge J)^*, I \wedge J] = L_{I \wedge J} \text{ и}$$

$$L_I \cap L_J = [I^* \sqcup J^*, I \sqcap J] \subseteq [(I \vee J)^*, I \vee J] = L_{I \vee J}.$$

Для этого нужно проверить, что $(I \wedge J)^* \leqslant I^* \sqcup J^*$, $(I \vee J)^* \leqslant I^* \sqcup J^*$, $I \sqcap J \leqslant I \wedge J$, и $I \sqcap J \leqslant I \vee J$. Так как $I \wedge J \leqslant I \vee J$, достаточно доказать, что

$$(4.1)\ I \sqcap J \leqslant I \wedge J \text{ и}$$

$$(4.2)\ (I \vee J)^* \leqslant I^* \sqcup J^*$$

.

4.1) Пусть $Q \in \operatorname{Down} \operatorname{Ji} L$. Ч.у. множество всех элементов $i \in \operatorname{Ji} L$, таких что $i \leqslant q$ для некоторого $q \in Q$ обозначим за $\operatorname{Downset} Q$. Нетрудно понять, что $\operatorname{Downset} Q \cap \operatorname{Downset} P = \operatorname{Downset} R$, где P, Q, R – множества в $\operatorname{Ji} L$.

Лемма 12. *Пусть дан* $\operatorname{Downset} Q$*, разбивающийся на две части: первая –* $\operatorname{Downset} d \in Q$*, вторая –* $\operatorname{Downset} Q/d$*, причем элемент d несравним ни с одним из максимальных элементов Q/d. Тогда d - максимальный элемент в* $\operatorname{Downset} Q$.

Доказательство. Пусть c - не максимальный в Q. Тогда существет элемент $d \in \operatorname{Downset} Q$, такой что $d > c$. По определению d не может находиться в $\operatorname{Downset} c$. Значит, $d \in \operatorname{Downset} Q/c$. Тогда существует максимальный в $\operatorname{Downset} Q/d$ элемент e, такой что $e \geqslant d$. Тогда имеем $e \geqslant d > c$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Следствие. *$I \sqcap J = I \wedge J$.*

Доказательство. $I \sqcap J$ состоит из макимальных элементов $\operatorname{Downset} I \cap \operatorname{Downset} J$ Обозначим получившееся множество за $\operatorname{Downset} Q$.

Среди них есть
- элементы $I^J = \{i \in I| \quad \exists j \in J : j \geqslant i\}$;
- элементы $J^I = \{j \in J| \quad \exists i \in I : i \geqslant j\}$.

Кроме того, по лемме 12 максимальным в $\operatorname{Downset} Q$ является каждый элемент c, такой что: - c несравним со каждым $i \in I^J \cap J^I$; - $c \leqslant i$ для некоторого $i \in I/I^;$ - $c \leqslant j$ для некоторого $j \in J/J^I\}$. Множество таких элементов обозначим через C.

Покажем, что это все элементы, которые являются максимальными в $\operatorname{Downset} Q$.

Пусть существует максимальный в $\operatorname{Downset} Q$ элемент q. Тогда он несравним с каждым элементом I^J, J^I и C.Так как I – максимальньная антицепь, то q сравним с каким-то элементом $i \in I/I^J$. Если $q \geqslant i$, то q не принадлежит $\operatorname{Downset} J$, а значит он не принадлежит и $\operatorname{Downset} Q$. Тогда $q < i$. Аналогично $q < j$ для некоторого $j \in J/I^I$. Тогда либо q уже принадлежит C, либо q– не максимальный в C, а значит и не максимальный в $\operatorname{Downset} Q$.

Таким образом, максимальные лементы $\operatorname{Downset} Q$ совпадают с элементами $I \wedge J$. □

4.2) Объединение $I \sqcup J$ в $\operatorname{Down}\operatorname{Ji} L$ состоит из
- элементов $I_J = \{i \in I| \quad \nexists j \in J \quad j > i\}$;
- элементов $J_I = \{j \in J| \quad \nexists i \in I \quad i > j\}$;
Объединение $I \vee J$ в $\operatorname{Ant}\operatorname{Ji} L$ состоит из
- элементов $I_J = \{i \in I| \quad \nexists j \in J \quad j > i\}$;
- элементов $J_I = \{j \in J| \quad \nexists i \in I \quad i > j\}$;
- элементов $C = \{c| \quad c$ не сравним ни с одним из элементов I_J, c не сравним ни с одним из элементов $J_I, \exists i \in I/I_J : i < c, \exists j \in J/J_I : j < c\}$.

Пусть $x \in (I \vee J)^*$. Покажем, что тогда x меньше или равен какому-то элементу из $J^* \sqcup I^*$.

Пусть $x \prec i \in I_J$ (аналогично если $x \prec j \in J_I$). Тогда по лемме 11 существует такой $i^* \in I^*$, что $x \leqslant i^*$. В свою очередь, i^* либо лежит в $J^* \sqcup I^* = I^*_{J^*} \cup J^*_{I^*}$, либо $\exists j^* \in J^* : j^* \geqslant i^*$. Но в этом случае $\exists j \in J : j > j^* \geqslant i^* > x \in I_J$, а значит $x \notin I_J$. Противоречие.

Значит, x несравним ни с одним из элементов $I_J \cup J_I$.

Пусть тогда $x \prec c \in C$.

Рассмотрим отношение x и I_J (Аналогично рассматриваем отношение x и J_I).

В силу того, что I – максимальная антицепь, существует ее элемент, с которым x сравним (возможно равен). Если $x \leqslant i$ для некоторого $i \in I^J$(аналогично если $x \leqslant j$ для некоторого $j \in J^I$), найдется $j \in J_I$ такой, что $j > i$. Тогда по лемме 11 $\exists j^* \in J^*$, такой что $j^* \geqslant i$. В свою очередь, j^* либо лежит в $J^* \sqcup I^* = I^*_{J^*} \cup J^*_{I^*}$, либо $\exists k^* \in I^* : k^* \geqslant j^*$. Но в этом случае $\exists k \in I : k > k^* \geqslant j^* \geqslant i \in I$, а значит I - не антицепь. Противоречие.

Итак, мы доказали, что, если $x \leqslant i$ для некоторого $i \in I^J \cup J^I$, то $x \leqslant j$ для некоторого j из $J^* \sqcup I^*$, что мы и хотели доказать.

Предположим тогда, что существует $x > i$ для некоторого $i \in I^J$ и $x > j$ для некоторого $j \in J^I$, то x - элемент, не сравнимый ни с одним из элементов $I_J \cup J_I$, но больший $i \in I^J$ и $j \in J^I$. Но тогда элемент c не может принадлежать C, так как не является минимальным с необходимыми свойствами. Противоречие.

Значит, $(I \wedge J)^* \leqslant (I \vee J)^* \leqslant I^* \sqcup J^*$.

5. Покажем, что $[A^*, A]$ изоморфен булеану $\operatorname{Downset} A / \operatorname{Downset} A^*$. Напомним, что L - решетка всех замкнутых вниз подмножеств относительно порядка включения. Значит все подмножества большие A^*, но меньшие A содержатся в L. В силу того, что $[A^*, A]$ - интервал, все такие подмножества содержатся в $[A^*, A]$.

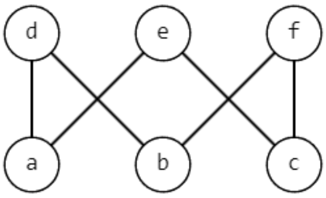
По построению A^* в антцепях A и A^* нет общих элементов, а так же нет такого элемента, что он меньше какого-то из A и больше какого-то из $A*$. Поэтому в $\operatorname{Downset} A / \operatorname{Downset} A^*$ столько же элементов, сколько и в A, а значит и размерность булеана $[A^*, A]$ – количество элементов в A.

6. По лемме 10пересечение булеанов (назовем его R), если оно есть, изоморфно булеану некоторого множества. Размернсть этого булеана равна количеству его элементов, покрывающих его 0. Рассмотрим неразложимые в L которые меньше или равны 1 и не меньше 0 решетки R (далее 1_R и 0_R соответственно). Так как R - интервал в $[A^*, A]$, среди таких неразложимых нет сравнимых. Тогда каждый из них в объединении с 0_R дает элемент в ней, покрывающий 0_R. Тогда количество таких неразложимых и есть размерность булевой решетки R. Оно равно количеству элементов в множестве $\{1_R\} \cup \{0_R\} - \{0_R\}$, а 1_R в свою очередь равен пересечению

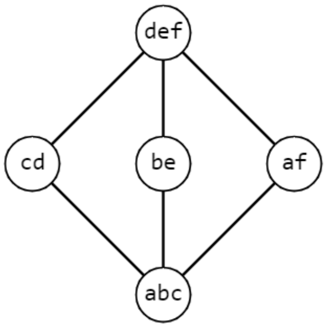
единиц интервалов $[A^*, A]$ и $[B^*, B]$, а значит равен $\{A\} \cap \{B\}$.

Теорема доказана. $\square$

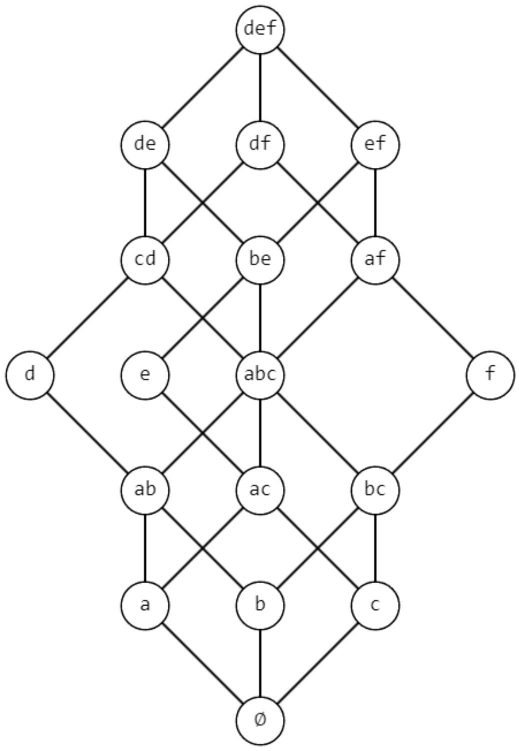
Пример 1:



P

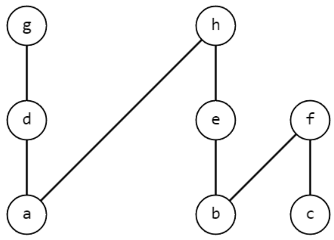


$Ant(P)$

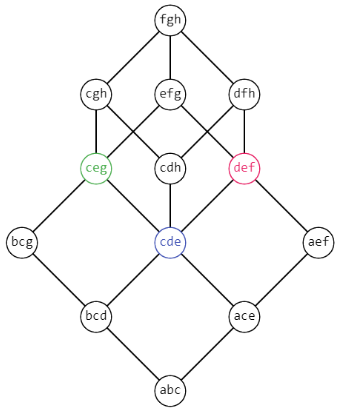


$Down(P)$

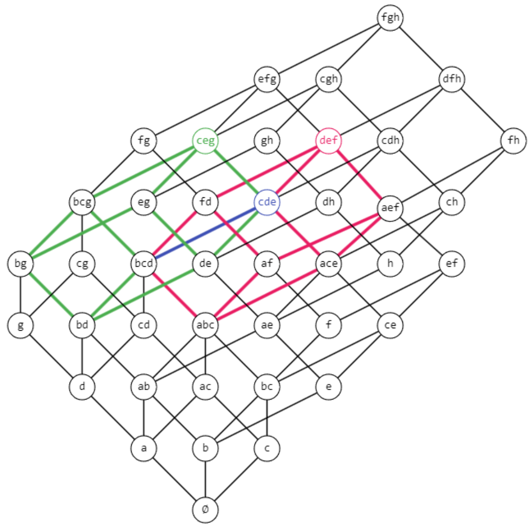
Пример 2:



P



$Ant(P)$



$Down(P)$

4 Результаты

Результатами данной работы являются теоремы 3, 4 и 5, ранее не известные.

Список литературы

[1] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

[2] Ganter B., Wille R.. Formal Concept Analysis. Foundations and Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005.

[3] Gratzer, G. Lattice Theory: Foundation – Birkhäuser Verlag, Basel 2011.

[4] Markowsky, G. An Overview of the Poset of Irreducibles, Combinatorial and Computational Mathematics: Present and Future, ed. by Hong, et al, World Scientific, Singapore 2001 162-177.