

**Критерии оценивания заданий заключительного этапа  
по направлению «Прикладная математика и информатика»**

Задания по направлению состояли из двух частей: инвариантной (обязательной для всех участников) и вариативной (разделённой на треки). Для того, чтобы претендовать на статусы дипломанта I, II, III степени, участникам необходимо набрать наибольшее число за задания, учитываемые в рейтинге по конкретным трекам. Для того, чтобы стать медалистом, участникам необходимо успешно выполнить задания по двум трекам.

| Номер задания | Максимальный балл | Учёт в рейтинге по треку «Анализ данных и искусственный интеллект» | Учёт в рейтинге по треку «Финансовые технологии» |
|---------------|-------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1             | 10                | ✓                                                                  | ✓                                                |
| 2             | 10                | ✓                                                                  | ✓                                                |
| 3             | 10                | ✓                                                                  | ✓                                                |
| 4             | 10                | ✓                                                                  | ✓                                                |
| 5             | 10                | ✓                                                                  | ✓                                                |
| 6             | 10                | ✓                                                                  | ✓                                                |
| 7             | 10                | ✓                                                                  | ✓                                                |
| 8             | 10                | ✓                                                                  |                                                  |
| 9             | 10                | ✓                                                                  |                                                  |
| 10            | 10                | ✓                                                                  |                                                  |
| 11            | 10                |                                                                    | ✓                                                |
| 12            | 10                |                                                                    | ✓                                                |
| 13            | 10                |                                                                    | ✓                                                |

**Общие критерии оценивания задач заключительного этапа**

По каждой задаче выставляется балл от 0 до 10:

- 10     Задача решена абсолютно верно;
- 9       Задача решена абсолютно верно, но имеются незначительные ошибки, не влияющие на ход решения и ответ;
- 7-8    Решение содержит пробелы или ошибки, однако его можно признать верным или почти верным;
- 4-6    Либо решена половина задачи, либо недочёты слишком существенны, чтобы признать решение верным (но само рассуждение основано на здравых идеях);
- 2-3    Задача не решена, но в тексте есть идеи, которые могут при должном развитии привести к решению;
- 1       Решение неверно;
- 0       Задача не решена;



## Решение заданий инвариантной части

### Задание 1

#### Краткое решение

Перепишем уравнение в виде:

$$x^2 = (y^2 + z^2)(2 - y^2 - z^2).$$

Сделаем замену координат:

$$y = r \cos(t), \quad z = r \sin(t), \quad dydz = r dr dt.$$

Тогда,

$$x^2 = r^2(2 - r^2).$$

Учитывая симметрию, объем можно вычислять взяв только  $x > 0$  при  $0 < r < \sqrt{2}$ :

$$V = 2 \int_0^{2\pi} dt \int_0^{\sqrt{2}} r \sqrt{2 - r^2} r dr = 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{2 - r^2} dr = \pi^2.$$

Учитывая симметрию, площадь сечения можно вычислять в границах  $0 < y < \sqrt{2}$ ,  $0 < x < y\sqrt{2 - y^2}$ :

$$S = 4 \int_0^{\sqrt{2}} y \sqrt{2 - y^2} dy = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

### Задание 2

**Алгебра Легкая** Можно честно вычислить  $n$ -ую степень матрицы  $A$  при помощи метода приведения матрицы к Жордановой нормальной форме, показав, что  $p(n) = 1 - 2n^2$  и  $q(n) = 2n^2$ . Однако, можно решить задачу проще. А именно, умножая  $A^n$  справа на  $A$  и сравнивая вторую строку полученной матрицы со второй строкой матрицы  $A^{n+1}$ , находим

$$2n + 2p(n) + 2q(n) = 2(n+1), \quad -4n - p(n) - 2q(n) = p(n+1), \quad 4n + 2p(n) + 3q(n) = q(n+1).$$

Подставляя соотношение  $p(n) = 1 - q(n)$ , полученное из первого уравнения, во второе и третье, получаем  $4n + 2 + q(n) = q(n+1)$ . Так как  $q(n) = an^2 + bn + c$ , то после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $n$ , приходим к  $a = 2, b = 0$ . Следовательно,  $q(n) = 2n^2 + c$ . Чтобы найти  $c$  воспользуемся тем, что  $q(1) = 2$ . Наконец,  $q(n) = 2n^2$  и  $p(n) = 1 - 2n^2$ .

**ОТВЕТ:**  $p(n) = 1 - 2n^2$  и  $q(n) = 2n^2$ .

#### Критерии

- |                  |                                                                                |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| <b>10 баллов</b> | Полностью обоснованное решение с правильным ответом.                           |
| <b>9 баллов</b>  | Верно найдена Жорданова нормальная форма, вычислена $A^n$ , но ответ неверный. |
| <b>8 баллов</b>  | Верно найдена Жорданова нормальная форма, но $A^n$ не вычислена.               |



**7 баллов** Верно найдены соотношения на  $p(n)$  и  $q(n)$ , из этих соотношений получены формулы для  $p(n)$  и  $q(n)$ , но одна из них неверная.

**6 баллов** Верно найдены соотношения на  $p(n)$  и  $q(n)$ , из этих соотношений получены формулы для  $p(n)$  и  $q(n)$ , но обе они неверные.

**4-5 баллов** Верно найдены соотношения на  $p(n)$  и  $q(n)$ .

**1-3 баллов** Различные попытки решения.

### Задание 3

$$L_{OLS} = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{\theta}{x_i}\right)^2 \rightarrow \min_{\theta}$$

$$\begin{aligned} \frac{dL_{OLS}}{d\theta} &= 2 \sum_{i=1}^n \left( \left(y_i - \frac{\theta}{x_i}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x_i}\right) \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i}{x_i} - \frac{\theta}{x_i^2} \right) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} - \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{x_i^2} &= 0 \end{aligned}$$

Итого:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}}$$

### Задание 4

Рассмотрим сначала число четверок множеств без второго ограничения. Выберем произвольный элемент множества  $\{1, \dots, 2024\}$ . Он может входить в любое подмножество множеств  $A, B, C, D$ , кроме пустого, поэтому для каждого элемента существует  $15$  ( $2^4 - 1$ ) вариантов. Поскольку четверка множеств определяется тем, какие элементы входят в какие множества, по правилу произведения получим  $15^{2024}$  четверок.

Но из этого числа нужно вычесть чисто не подходящих четверок, т.е. тех, пересечение которых пусто. Для произвольного элемента такой четверки вариантов уже  $14$  (элемент не может входить вовсе в 4 множества). Аналогично получим  $14^{2024}$  четверки.

Ответ:  $15^{2024} - 14^{2024}$ .



### Критерии:

Сложение вместо умножения и/или умножение вместо возведения в степень: 0 баллов.

Не обосновано появление слагаемых вида  $14(15)^{2024}$ : до 7 баллов.

Обоснованное появление формул вида  $x^{2024}$  при неверном ответе: не более 3 баллов.

Ответ не является замкнутой формулой: 0 баллов.

Ответ и решение отличается от правильного разовым применением бинома Ньютона. Ответ в незамкнутой форме: 5 баллов.

Нет решения, ответа и/или неверный ответ: 0 баллов.

Неверно вычислено вычитаемое. Чаще всего предполагается, что элемент входит ровно в одно из множеств: до 5 баллов.

Неверно вычислены и уменьшаемое и вычитаемое. Чаще всего предполагается, что элемент входит ровно в одно из множеств: до 3 баллов.

Ошибка в вычитаемом: 16 вместо 15: 5 баллов

Решение с факториалами. Верным быть не может --- элементы во множествах не упорядочены: 0 баллов.

Выбор фиксированного элемента в пересечении. Приводит к двойному подсчету, если их в пересечении больше одного: до 3 баллов.

### Задание 5

**Алгебра Сложная** Непосредственно из определения после долгих вычислений можно получить

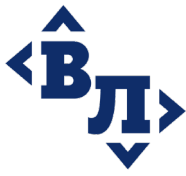
$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 7 & 25 & 29 \\ -1 & -5 & -5 \\ 4 & 14 & 16 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 20 \\ -4 & -4 & 6 \\ 6 & 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Однако можно существенно сократить объем вычислений, используя соотношение  $A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A)I$ , где  $I$  - единичная матрица. Отсюда следует, что  $\det(\operatorname{adj}(A)) = \det^{n-1}(A)$  (считаем, что матрица  $A$  имеет размер  $n$  на  $n$ ). Пусть  $B = \operatorname{adj}(A)$ . Тогда  $B = \det(A)A^{-1}$  и  $B \cdot \operatorname{adj}(B) = \det(B)I = \det^{n-1}(A)I$ . Значит  $\operatorname{adj}(B) = \operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \det^{n-2}(A)A$ . Следовательно, для данной в задаче матрицы получаем

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)A = -2A = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 20 \\ -4 & -4 & 6 \\ 6 & 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

**ОТВЕТ:**

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 20 \\ -4 & -4 & 6 \\ 6 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$



### Критерии:

- 10 баллов** Полностью обоснованное решение с правильным ответом.
- 8-9 баллов** Верно доказана формула  $\text{adj}(\text{adj}(A)) = \text{det}(A)A$  и верно вычислен  $\text{det}(A)$ , но в итоговом ответе присутствуют незначительные ошибки.
- 7 баллов** Верно доказана формула  $\text{adj}(\text{adj}(A)) = \text{det}(A)A$ , но неверно вычислен  $\text{det}(A)$ .
- 5-6 баллов** Верно найдена  $\text{adj}(A)$  и частично  $\text{adj}(\text{adj}(A))$ .
- 4 балла** Верно найдена  $\text{adj}(A)$ .
- 1-3 баллов** Различные попытки решения.

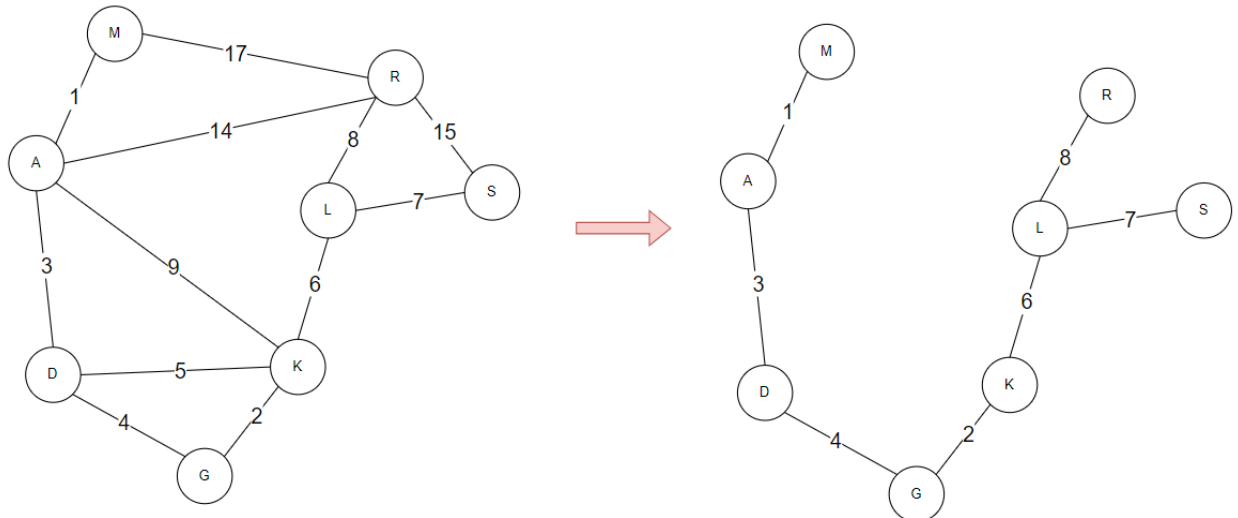
### Задание 6

Решение предложенной задачи заключается в поиске минимального остовного дерева с обоснованием оптимальности полученного решения. Наиболее распространенными алгоритмами, гарантирующими оптимальность решения без полного перебора являются алгоритмы Краскала или Прима, отсылка к ним считается правильным решением задачи.

Общий порядок решения следующий:

1. Удалим из исходного графа все ребра.
2. Среди удалённых рёбер найдем ребро с наименьшим весом, после чего проверим, не связаны ли вершины, соединяемые данным ребром, другими ребрами. Если нет - добавить ребро на граф, в ином случае пропустить его.
3. Повторять шаг 2 до тех пор пока в графе не окажется  $n-1$  ребер (где  $n$  - кол-во узлов графа).
4. Произвести проверку, что построенный граф является минимальным остовом исходного графа (например, не должно быть циклов или в оставшихся ребрах нет ребер с меньшим весом и не противоречащим условия на шаге 2).

### Пример решения:



По шагам:

1. Взять ребро А-М, вершины не связаны, добавить ребро. ( $\Sigma = 1$ )
2. Взять ребро G-K, вершины не связаны, добавить ребро. ( $\Sigma = 3$ )



3. Взять ребро A-D, вершины не связаны, добавить ребро. ( $\Sigma = 6$ )
4. Взять ребро D-G, вершины не связаны, добавить ребро. ( $\Sigma = 10$ )
5. Взять ребро D-K, вершины связаны (D-G-K), пропустить ребро. ( $\Sigma = 10$ )
6. Взять ребро K-L, вершины не связаны, добавить ребро. ( $\Sigma = 16$ )
7. Взять ребро L-S, вершины не связаны, добавить ребро. ( $\Sigma = 23$ )
8. Взять ребро L-R, вершины не связаны, добавить ребро. ( $\Sigma = 31$ )

Проверяем, что граф является минимальным остовом исходного.

Обоснование оптимальности: на каждом шаге последовательно бралось ребро минимального веса, которое связывало пару вершин, ранее не встречавшуюся. При каждой успешной итерации на графе становилось на одну недоступную вершину меньше. В конце обхода графа все вершины соединены и количество ребер минимально ( $n-1$ ). При соблюдении алгоритма, итоговый граф должен получиться как на картинке выше.

**Итоговый ответ: 31**

### Задание 7

1)

Let  $f(n)$  denotes the number of multiplications performed by algo 1 to compute  $x^n$ .

Then:  $f(n)=0$  if  $n=1$ ,  $f(n/2)+1$  if  $n$  even or  $2$  if  $n$  odd) otherwise.

One computes:

$$f(15)=f(7)+2=f(3)+2+2=f(1)+2+2+2=0+2+2+2=6$$

$$f(23)=f(11)+2=f(5)+2+2=f(2)+2+2+2=f(1)+1+2+2+2=0+1+2+2+2=7$$

$$f(33)=f(16)+2=f(8)+1+2=f(4)+1+1+2=f(2)+1+1+1+2=f(1)+1+1+1+1+2=0+1+1+1+1+2=6$$

Let  $g(n)$  denotes the number of multiplications performed by algo 1 to compute  $x^n$ .

Then:  $g(n)=0$  if  $n=1$ , or  $g(n-1)+1$  if  $n$  is prime, or  $g(p)+g(n/p)$  otherwise, where  $p$  is the smallest prime divisor of  $n$ .

One computes:

$$g(15)=g(3 \cdot 5)=g(3)+g(5)=(g(2)+1)+(g(4)+1)=(g(1)+1+1)+(g(2)+g(2)+1)=(0+1+1)+(1+1+1)=5$$

$$g(23)=g(22)+1=g(11)+g(2)+1=g(10)+1+1+1=g(2)+g(5)+3=1+3+3=7$$

$$g(33)=g(3)+g(11)=2+5=7$$

2)

It is possible to compute  $x^{23}$  with only 6 multiplications:

$$x^2 = x * x$$

$$x^3 = x^2 * x$$

$$x^5 = x^2 * x^3$$

$$x^{10} = x^5 * x^5$$

$$x^{20} = x^{10} * x^{10}$$

$$x^{23} = x^{20} * x^3$$



## Вариативная часть

### Решение заданий трека «Анализ данных и искусственный интеллект»

#### Задание 8

**Решение:** не существует. Добавим лист к диаметральной цепи дерева. В полученном графе диаметральная цепь будет на единицу длиннее, чем в исходном.

В дереве 2 центра, если длина диаметральной цепи нечетна и один, если четна. Поскольку четность длины диаметральной цепи изменилась, то и число центров изменилось. Заметим, что в условии спрашивалось именно о множестве центров, центр может остаться центром, но множество их изменится.

#### Критерии:

Только ответ: 0 баллов.

Неверный ответ с примером дерева или верный ответ на основе примера: 0 баллов.

Пример с деревом из 1 вершины. 0 баллов. Он не подходит: дерево на одной вершине имеет один центр, а после добавления листа --- два.

Утверждение, что множество центров меняется при добавлении любой вершины: 0 баллов.

Центром графа называется вершина, эксцентриситет которой минимален. Это единственное общеизвестное определение. Поэтому решение, исходящее из неверного определения центра, оценивается в 0 баллов.

Идея добавить лист к диаметральной цепи без достаточного доказательства сопутствующих утверждений: 3 балла.

#### Задание 9

**ОДУ** Пусть  $S(t)$  - суммарный размер выплачиваемых фондом грантов в момент времени  $t$ . Так как индексация происходит равномерно, то

$$S' = 0.08S(t) \quad \text{и значит} \quad S(t) = S(0)e^{0.08t}.$$

Пусть  $P(t)$  - количество денег на счете фонда. Тогда  $P' = -S(t) + 0.1P(t)$ . Решая однородное уравнение, получаем  $P(t) = C(t)e^{0.1t}$ . Следовательно,

$$C' = -S(0)e^{-t/50}, \quad C = 50S(0)e^{-t/50} + C_1.$$

Значит  $P(t) = 50S(0)e^{0.08t} + C_1e^{0.1t}$  и  $C_1 = P(0) - 50S(0)$ . Таким образом,

$$P(t) = 50S(0)e^{0.08t} + (P(0) - 50S(0))e^{0.1t}.$$

По условию  $P(50) = 0$ , откуда находим  $P(0) = 50S(0)(1 - e^{-1})$ . Так как  $S(0) = 5 \cdot 10^7$ , то ответ  $P(0) = 25(1 - e^{-1})10^8$ .

**ОТВЕТ:**  $25(1 - e^{-1})10^8 = 1580301397.07\dots$  рублей.



### Критерии:

**10 баллов** Полностью обоснованное решение с правильным ответом.

**8-9 баллов** Верно составлены дифференциальные уравнения на величины  $P(t)$ ,  $S(t)$ . Правильно найдены их решения, но допущены арифметические ошибки.

**6-7 баллов** Допущены ошибки при решении верно составленных дифференциальных уравнений.

**4-5 балла** Верно составлены дифференциальные уравнения, но отсутствуют попытки их решения.

**1-3 баллов** Различные попытки решения.

### Задание 10

а) Найдите log-likelihood функцию  $l(p_1, \dots, p_k | X_1, \dots, X_k)$ .

Ответ:  $l(p_1, \dots, p_k | X_1, \dots, X_k) = \log(n!) - \sum_{i=1}^k \log(X_i!) + \sum_{i=1}^n X_i \log p_i$

б) Вы можете заметить, что неограниченная максимизация этой функции приводит к ответу, в котором мы задаем для каждого  $p_i = \infty$ . Но это неправильно. Мы должны добавить ограничение, чтобы вероятности в сумме равнялись 1. Теперь мы имеем следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{p_1, \dots, p_k} l(p_1, \dots, p_k | X_1, \dots, X_k), \quad \text{при условии что } \sum_{i=1}^k p_i = 1$$

Найдите функции максимального правдоподобия для  $p_1, \dots, p_k$  используя метод множителей Лагранжа.

Ответ:

Получаем следующий Лагранжиан

$$L(p_1, \dots, p_k, \lambda) = \log(n!) - \sum_{i=1}^k \log(X_i!) + \sum_{i=1}^n X_i \log p_i + \lambda(1 - \sum_{i=1}^k p_i)$$

Возьмем производную по отношению к каждому  $p_i$  и  $\lambda$  и приравняем ее к 0

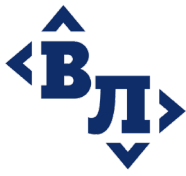
$$\frac{dL}{dp_i} = \frac{X_i}{p_i} - \lambda = 0$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = 1 - \sum_{i=1}^k p_i = 0$$

Получаем следующую функцию:

$$\hat{p}_{MLE} = \frac{X_i}{n}$$





**Решение заданий трека  
«Финансовые технологии»**

**Задание 11**

Такой формулы не существует. Рассмотрим отображение множества действительных чисел на себя, переводящее  $x$  в  $-x$ . Это отображение сохраняет операции сложения:  $(-x) + (-y) = -(x+y)$  и возведения в куб:  $(-x)^3 = -x^3$ . Следовательно, для любой формулы  $A(x,y,z)$  в данном языке будет иметь место равносильность  $A(x,y,z) \leftrightarrow A(-x,-y,-z)$ . При этом для умножения это неверно:  $(-x)(-y)$  не равно, вообще говоря,  $-xy$ . При этом для умножения это неверно:  $(-x)(-y)$  не равно, вообще говоря,  $-(xy)$ .

**Задание 12**

1. Нарушается предпосылка о том, что  $D(\varepsilon_i) = D(\varepsilon_j) = \sigma^2$  для любого  $i, j$ :  $D(\varepsilon_t) = D(tu_t) = t^2 D(u_t) = t^2 \sigma^2$ . Соответственно для различных  $t$  дисперсии ошибок будут отличаться
2. Внимательный читатель может отметить и то, что в задании пропущено «*независимые одинаково распределенные случайные величины*» (но если сдающий и не указал данный пункт, то за это предлагается не снимать баллы)
3. Внимательный читатель также может обратить внимание, что в модели пропущен свободный член  $\alpha$ , но можно считать это не отклонением, а частным случаем линейной модели, где  $\alpha = 0$  (но если сдающий и не указал данный пункт, то за это предлагается не снимать баллы)

**Задание 13**

(а) Найдем вектор  $e_i$  остатков регрессии МНК исходной модели:

$$e_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \hat{\beta}_3 x_{i3}$$

Тогда уравнение вспомогательной регрессии будет состоять в оценке зависимости квадрата остатков от исходных регрессоров, их квадратов и попарных произведений:

$$e_i^2 = \gamma + \sum_{k=1}^3 \varphi_k x_{ik} + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=k}^3 \omega_{kl} x_{ik} x_{il} + u_i$$

В развернутой форме:

$$e_i^2 = \gamma + \varphi_1 x_{i1} + \varphi_2 x_{i2} + \varphi_3 x_{i3} + \omega_{11} x_{i1}^2 + \omega_{22} x_{i2}^2 + \omega_{33} x_{i3}^2 + \omega_{12} x_{i1} x_{i2} + \omega_{13} x_{i1} x_{i3} + \omega_{23} x_{i2} x_{i3} + u_i$$

(b) Статистика Уайта:

$$W = n \cdot R_{\text{всп}}^2 \sim \chi_{10-1}^2$$

Если решающий достиг этого уровня, то ставим максимальный балл.

В конце, если у ребят были таблицы распределений, возможно, некоторые смогли найти:

$$P(\chi_9^2 > 12.24) \approx 0.2$$