Критерии оценивания заданий заключительного этапа по направлению «Прикладная математика и информатика»

Задания по направлению состояли из двух частей: инвариантной (обязательной для всех участников) и вариативной (разделённой на треки). Для того, чтобы претендовать на статусы дипломанта I, II, III степени, участникам необходимо набрать наибольшее число за задания, учитываемые в рейтинге по конкретным трекам. Для того, чтобы стать медалистом, участникам необходимо успешно выполнить задания по двум трекам.

Номер задания	Макси-мальный балл	Учёт в рейтинге по треку «Анализ данных и искусственный интеллект»	Учёт в рейтинге по треку «Финансовые технологии»
1	10	✓	✓
2	10	✓	✓
3	10	✓	✓
4	10	✓	✓
5	10	✓	✓
6	10	✓	✓
7	10	✓	✓
8	10	✓	
9	10	✓	
10	10	✓	
11	10		✓
12	10		✓
13	10		✓

Общие критерии оценивания задач заключительного этапа

По каждой задаче выставляется балл от 0 до 10:

10	Задача решена абсолютно верно;
9	Задача решена абсолютно верно, но имеются незначительные ошибки, не влияющие на ход решения и ответ;
7-8	Решение содержит пробелы или ошибки, однако его можно признать верным или почти верным;
4-6	Либо решена половина задачи, либо недочёты слишком существенны, чтобы признать решение верным (но само рассуждение основано на здравых идеях);
2-3	Задача не решена, но в тексте есть идеи, которые могут при должном развитии привести к решению;
1	Решение неверно;
0	Задача не решена;

Решение заданий инвариантной части

Задание 1

Краткое решение

Перепишем уравнение в виде:

$$x^2 = (y^2 + z^2)(2 - y^2 - z^2).$$

Сделаем замену координат:

$$y = r\cos(t), \quad z = r\sin(t), \quad dydz = rdrdt.$$

Тогда,

$$x^2 = r^2(2 - r^2).$$

Учитывая симметрию, объем можно вычислять взяв только $x > 0$ при $0 < r < \sqrt{2}$:

$$V = 2\int_0^{2\pi} dt \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{2 - r^2}\, r\, dr = 4\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^2\sqrt{2 - r^2}\, dr = \pi^2.$$

Учитывая симметрию, площадь сечения можно вычислять в границах $0 < y < \sqrt{2}$, $0 < x < y\sqrt{2 - y^2}$:

$$S = 4\int_0^{\sqrt{2}} y\sqrt{2 - y^2}\, dy = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Задание 2

Алгебра Легкая Можно честно вычислить n-ую степень матрицы A при помощи метода приведения матрицы к Жордановой нормальной форме, показав, что $p(n) = 1 - 2n^2$ $q(n) = 2n^2$. Однако, можно решить задачу проще. А именно, умножая A^n справа на A и сравнивая вторую строку полученной матрицы со второй строкой матрицы A^{n+1}, находим

$$2n + 2p(n) + 2q(n) = 2(n+1), \quad -4n - p(n) - 2q(n) = p(n+1), \quad 4n + 2p(n) + 3q(n) = q(n+1).$$

Подставляя соотношение $p(n) = 1 - q(n)$, полученное из первого уравнения, во второе и третье, получаем $4n + 2 + q(n) = q(n+1)$. Так как $q(n) = an^2 + bn + c$, то после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях n, приходим к $a = 2, b = 0$. Следовательно, $q(n) = 2n^2 + c$. Чтобы найти c воспользуемся тем, что $q(1) = 2$. Наконец, $q(n) = 2n^2$ и $p(n) = 1 - 2n^2$.

ОТВЕТ: $p(n) = 1 - 2n^2$ и $q(n) = 2n^2$.

Критерии

10 баллов Полностью обоснованное решение с правильным ответом.

9 баллов Верно найдена Жорданова нормальная форма, вычислена A^n, но ответ неверный.

8 баллов Верно найдена Жорданова нормальная форма, но A^n не вычислена.

7 баллов Верно найдены соотношения на $p(n)$ и $q(n)$, из этих соотношений получены формулы для $p(n)$ и $q(n)$, но одна из них неверная.
6 баллов Верно найдены соотношения на $p(n)$ и $q(n)$, из этих соотношений получены формулы для $p(n)$ и $q(n)$, но обе они неверные.
4-5 баллов Верно найдены соотношения на $p(n)$ и $q(n)$.
1-3 баллов Различные попытки решения.

Задание 3

$$\mathrm{L_{OLS}} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \frac{\theta}{x_i})^2 \to min_\theta$$

$$\frac{\mathrm{dL_{OLS}}}{d\theta} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\left(y_i - \frac{\theta}{x_i}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x_i}\right)\right) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i}{x_i} - \frac{\theta}{x_i^2}\right) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_i^2} = 0$$

Итого:

$$\hat{\theta} = {\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}} \Big/ {\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}}$$

Задание 4

Рассмотрим сначала число четверок множеств без второго ограничения. Выберем произвольный элемент множества {1, … ,2024}. От может входить в любое подмножество множеств A, B, C, D, кроме пустого, поэтому для каждого элемента существует 15 (2^4 – 1) вариантов. Поскольку четверка множеств определяется тем, какие элементы входят в какие множества, по правилу произведения получим 15^{2024} четверок.

Но из этого числа нужно вычесть чисто не подходящих четверок, т.е. тех, пересечение которых пусто. Для произвольного элемента такой четверки вариантов уже 14 (элемент не может входить вовсе 4 множества). Аналогично получим 14^{2024} четверки.

Ответ: $15^{2024} - 14^{2024}$.

Критерии:
Сложение вместо умножения и/или умножение вместо возведения в степень: 0 баллов.
Не обосновано появление слагаемых вида $14(15)^{2024}$: до 7 баллов.
Обоснованное появление формул вида x^{2024} при неверном ответе: не более 3 баллов.
Ответ не является замкнутой формулой: 0 баллов.
Ответ и решение отличается от правильного разовым применением бинома Ньютона. Ответ в незамкнутой форме: 5 баллов.
Нет решения, ответа и/или неверный ответ: 0 баллов.
Неверно вычислено вычитаемое. Чаще всего предполагается, что элемент входит ровно в одно из множеств: до 5 баллов.
Неверно вычислены и уменьшаемое и вычитаемое. Чаще всего предполагается, что элемент входит ровно в одно из множеств: до 3 балов.
Ошибка в вычитаемом: 16 вместо 15: 5 баллов
Решение с факториалами. Верным быть не может --- элементы во множествах не упорядочены: 0 баллов.
Выбор фиксированного элемента в пересечении. Приводит к двойному подсчету, если их в пересечении больше одного: до 3 баллов.

Задание 5

Алгебра Сложная Непосредственно из определения после долгих вычислений можно получить

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 7 & 25 & 29 \\ -1 & -5 & -5 \\ 4 & 14 & 16 \end{pmatrix}, \quad adj(adj(A)) = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 20 \\ -4 & -4 & 6 \\ 6 & 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Однако можно существенно сократить объем вычислений, используя соотношение $A \cdot adj(A) = \det(A)I$, где I - единичная матрица. Отсюда следует, что $\det(adj(A)) = \det^{n-1}(A)$ (считаем, что матрица A имеет размер n на n). Пусть $B = adj(A)$. Тогда $B = \det(A)A^{-1}$ и $B \cdot adj(B) = \det(B)I = \det^{n-1}(A)I$. Значит $adj(B) = adj(adj(A)) = \det^{n-2}(A)A$. Следовательно, для данной в задаче матрицы получаем

$$adj(adj(A)) = \det(A)A = -2A = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 20 \\ -4 & -4 & 6 \\ 6 & 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

ОТВЕТ:

$$adj(adj(A)) = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 20 \\ -4 & -4 & 6 \\ 6 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

Критерии:

10 баллов Полностью обоснованное решение с правильным ответом.

8-9 баллов Верно доказана формула $adj(adj(A)) = det(A)A$ и верно вычислен $det(A)$, но в итоговом ответе присутствуют незначительные ошибки.

7 баллов Верно доказана формула $adj(adj(A)) = det(A)A$, но неверно вычислен $det(A)$.

5-6 баллов Верно найдена $adj(A)$ и частично $adj(adj(A))$.

4 балла Верно найдена $adj(A)$.

1-3 баллов Различные попытки решения.

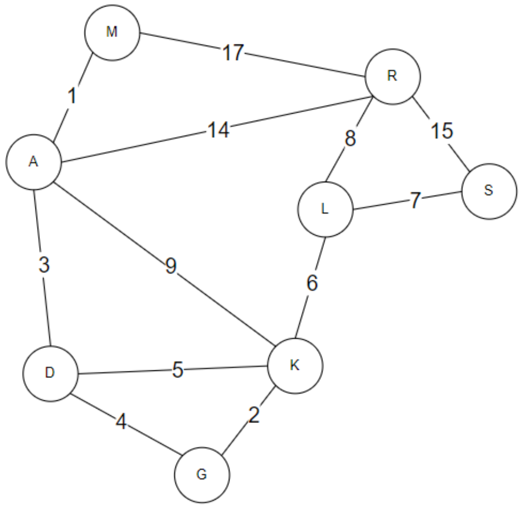
Задание 6

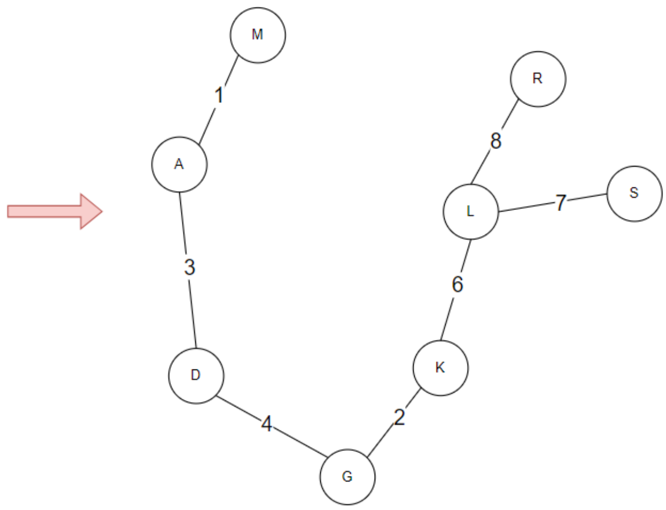
Решение предложенной задачи заключается в поиске минимального остовного дерева с обоснованием оптимальности полученного решения. Наиболее распространенными алгоритмами, гарантирующими оптимальность решения без полного перебора являются алгоритмы Краскала или Прима, отсылка к ним считается правильным решением задачи.

Общий порядок решения следующий:

1. Удалим из исходного графа все ребра.
2. Среди удалённых рёбер найдем ребро с наименьшим весом, после чего проверим, не связаны ли вершины, соединяемые данным ребром, другими ребрами. Если нет - добавить ребро на граф, в ином случае пропустить его.
3. Повторять шаг 2 до тех пор пока в графе не окажется n-1 ребер (где n - кол-во узлов графа).
4. Произвести проверку, что построенный граф является минимальным остовом исходного графа (например, не должно быть циклов или в оставшихся ребрах нет ребер с меньшим весом и не противоречащим условия на шаге 2).

Пример решения:





По шагам:

1. Взять ребро A-M, вершины не связаны, добавить ребро. ($\sum = 1$)
2. Взять ребро G-K, вершины не связаны, добавить ребро. ($\sum = 3$)

3. Взять ребро A-D, вершины не связаны, добавить ребро. (∑ = 6)
4. Взять ребро D-G, вершины не связаны, добавить ребро. (∑ = 10)
5. Взять ребро D-K, вершины связаны (D-G-K), пропустить ребро. (∑ = 10)
6. Взять ребро K-L, вершины не связаны, добавить ребро. (∑ = 16)
7. Взять ребро L-S, вершины не связаны, добавить ребро. (∑ = 23)
8. Взять ребро L-R, вершины не связаны, добавить ребро. (∑ = 31)

Проверяем, что граф является минимальным остовом исходного.

Обоснование оптимальности: на каждом шаге последовательно бралось ребро минимального веса, которое связывало пару вершин, ранее не встречавшуюся. При каждой успешной итерации на графе становилось на одну недоступную вершину меньше. В конце обхода графа все вершины соединены и количество ребер минимально (n-1). При соблюдении алгоритма, итоговый граф должен получится как на картинке выше.

Итоговый ответ: 31

Задание 7

1)

Let f(n) denotes the number of multiplications performed by algo 1 to compute x^n.
Then: f(n)=0 if n=1, f(n/2)+(1 if n even or 2 if n odd) otherwise.
One computes:
f(15)=f(7)+2=f(3)+2+2=f(1)+2+2+2=0+2+2+2=6
f(23)=f(11)+2=f(5)+2+2=f(2)+2+2+2=f(1)+1+2+2+2=0+1+2+2+2=7
f(33)=f(16)+2=f(8)+1+2=f(4)+1+1+2=f(2)+1+1+1+2=f(1)+1+1+1+1+2=0+1+1+1+1+2=6

Let g(n) denotes the number of multiplications performed by algo 1 to compute x^n.
Then: g(n)=0 if n=1, or g(n-1)+1 if n is prime, or g(p)+g(n/p) otherwise, where p is the smallest prime divisor of n.
One computes:
g(15)=g(3*5)=g(3)+g(5)=(g(2)+1)+(g(4)+1)=(g(1)+1+1)+(g(2)+g(2)+1)=(0+1+1)+(1+1+1)=
5
g(23)=g(22)+1=g(11)+g(2)+1=g(10)+1+1+1=g(2)+g(5)+3=1+3+3=7
g(33)=g(3)+g(11)=2+5=7

2)

It is possible to compute x^{23} with only 6 multiplications:
$x^2=x*x$
$x^3= x^2*x$
$x^5= x^2*x^3$
$x^{10}=x^5*x^5$
$x^{20}=x^{10}*x^{10}$
$x^{23}=x^{20}*x^3$

Вариативная часть

Решение заданий трека
«Анализ данных и искусственный интеллект»

Задание 8
Решение: не существует. Добавим лист к диаметральной цепи дерева. В полученном графе диаметральная цепь будет на единицу длиннее, чем в исходном.
В дереве 2 центра, если длина диаметральной цепи нечетна и один, если четна. Поскольку четность длины диаметральной цепи изменилась, то и число центров изменилось. Заметим, что в условии спрашивалось именно о множестве центров, центр может остаться центром, но множество их изменится.

Критерии:
Только ответ: 0 баллов.
Неверный ответ с примером дерева или верный ответ на основе примера: 0 баллов.
Пример с деревом из 1 вершины. 0 баллов. Он не подходит: дерево на одной вершине имеет один центр, а после добавления листа --- два.
Утверждение, что множество центров меняется при добавлении любой вершины: 0 баллов.
Центром графа называется вершина, эксцентриситет которой минимален. Это единственное общеизвестное определение. Поэтому решение, исходящее из неверного определения центра, оценивается в 0 баллов.
Идея добавить лист к диаметральной цепи без достаточного доказательства сопутствующих утверждений: 3 балла.

Задание 9
Такой формулы не существует. Рассмотрим отображение множества действительных чисел на себя, переводящее x в -x. Это отображение сохраняет операции сложения: $(-x) + (-y) = -(x+y)$ и возведения в куб: $(-x)^3 = -x^3$. Следовательно, для любой формулы $A(x,y,z)$ в данном языке будет иметь место равносильность $A(x,y,z) \leftrightarrow A(-x,-y,-z)$. При этом для умножения это неверно: $(-x)(-y)$ не равно, вообще говоря, xy. При этом для умножения это неверно: $(-x)(-y)$ не равно, вообще говоря, $-(xy)$.

Задание 10

a) Найдите log-likelihood функцию $l(p_1,\dots,p_k|X_1,\dots,X_k)$.

Ответ: $l(p_1,\dots,p_k|X_1,\dots,X_k) = log(n!) - \sum_{i=1}^{k}\log(X_i!) + \sum_{i=1}^{n} X_i \log p_i$

b) Вы можете заметить, что неограниченная максимизация этой функции приводит і ответу, в котором мы задаем для каждого $p_i = \infty$. Но это неправильно. Мы должны добавить ограничение, чтобы вероятности в сумме равнялись 1. Теперь мы имеем следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{p_1,\dots,p_k} l(p_1,\dots,p_k|X_1,\dots,X_k), \qquad \text{при условии что} \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

Найдите функции максимального правдоподобия для $p_1,\dots,p_k$ используя метод множителей Лагранжа.

Ответ:
Получаем следующий Лагранжиан

$$L(p_1,\dots,p_k,\lambda) = log(n!) - \sum_{i=1}^{k}\log(X_i!) + \sum_{i=1}^{n} X_i \log p_i + \lambda(1 - \sum_{i=1}^{k} p_i)$$

Возьмем производную по отношению к каждому pi и λ и приравняем ее к 0

$$\frac{dL}{dp_i} = \frac{X_i}{p_i} - \lambda = 0$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = 1 - \sum_{i=1}^{k} p_i = 0$$

Получаем следующую функцию:

$$\widehat{p_i}_{MLE} = \frac{X_i}{n}$$

Решение заданий трека
«Финансовые технологии»

Задание 11

ОДУ Пусть $S(t)$ - суммарный размер выплачиваемых фондом грантов в момент времени t. Так как индексация происходит равномерно, то

$$S' = 0.08S(t) \quad \text{и значит} \quad S(t) = S(0)e^{0.08t}.$$

Пусть $P(t)$ - количество денег на счете фонда. Тогда $P' = -S(t) + 0.1P(t)$. Решая однородное уравнение, получаем $P(t) = C(t)e^{0.1t}$. Следовательно,

$$C' = -S(0)e^{-t/50}, \quad C = 50S(0)e^{-t/50} + C_1.$$

Значит $P(t) = 50S(0)e^{0.08t} + C_1e^{0.1t}$ и $C_1 = P(0) - 50S(0)$. Таким образом,

$$P(t) = 50S(0)e^{0.08t} + (P(0) - 50S(0))e^{0.1t}.$$

По условию $P(50) = 0$, откуда находим $P(0) = 50S(0)(1-e^{-1})$. Так как $S(0) = 5\cdot 10^7$, то ответ $P(0) = 25(1-e^{-1})10^8$.

ОТВЕТ: $25(1-e^{-1})10^8 = 1580301397.07....$ рублей.

Критерии:
10 баллов Полностью обоснованное решение с правильным ответом.
8-9 баллов Верно составлены дифференциальные уравнения на величины *P(t), S(t)*. Правильно найдены их решения, но допущены арифметические ошибки.
6-7 баллов Допущены ошибки при решении верно составленных дифференциальных уравнений.
4-5 балла Верно составлены дифференциальные уравнения, но отсутствуют попытки их решения.
1-3 баллов Различные попытки решения.

Задание 12

1. Нарушается предпосылка о том, что $D(\varepsilon_i) = D(\varepsilon_j) = \sigma^2$ для любого i, j: $D(\varepsilon_t) = D(tu_t) = t^2D(u_t) = t^2\sigma^2$. Соответственно для различных t дисперсии ошибок будут отличаться
2. Внимательный читатель может отметить и то, что в задании пропущено «*независимые* **одинаково распределенные** *случайные величины*» (но если сдающий и не указал данный пункт, то за это предлагается не снимать баллы)
3. Внимательный читатель также может обратить внимание, что в модели пропущен свободный член α, но можно считать это не отклонением, а частным случаем линейной модели, где $\alpha = 0$ (но если сдающий и не указал данный пункт, то за это предлагается не снимать баллы)

Задание 13

(a) Найдем вектор e_i остатков регрессии МНК исходной модели:

$$e_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \hat{\beta}_3 x_{i3}$$

Тогда уравнение вспомогательной регрессии будет состоять в оценке зависимости квадрата остатков от исходных регрессоров, их квадратов и попарных произведений:

$$e_i^2 = \gamma + \sum_{k=1}^{3} \varphi_k x_{ik} + \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=k}^{3} \omega_{kl} x_{ik} x_{il} + u_i$$

В развернутой форме:

$$e_i^2 = \gamma + \varphi_1 x_{i1} + \varphi_2 x_{i2} + \varphi_3 x_{i3} + \omega_{11} x_{i1}^2 + \omega_{22} x_{i2}^2 + \omega_{33} x_{i3}^2 + \omega_{12} x_{i1} x_{i2} + \omega_{13} x_{i1} x_{i3} + \omega_{23} x_{i2} x_{i3} + u_i$$

(b) Статистика Уайта:

$$W = n \cdot R^2_{\text{всп}} \sim \chi^2_{10-1}$$

Если решающий достиг этого уровня, то ставим максималный балл.

В конце, если у ребят были таблицы распределений, возможно, некоторые смогли найти:

$$P(\chi^2_9 > 12.24) \approx 0.2$$