Вопрос **Инфо**

Уважаемые участники!

Олимпиадное задание по направлению «Прикладная математика и информатика» состоит из двух частей:

Инвариантная часть представлена заданиями № 1–7. Их нужно выполнить всем участникам.

Вариативная часть разделена на треки:

- Трек «Анализ данных и искусственный интеллект»: задания № 8–10.
- Трек «Финансовые технологии»: задания № 11–13.

Вы можете сосредоточиться на выполнении заданий одного трека (чтобы претендовать на статус дипломанта I, II, III степени) или постараться максимально результативно выполнить задания двух треков, чтобы претендовать на статус медалиста.

Все задания выполняются в этой системе: решения вносите в специальное поле для ответов. Если решение требует указания формул, графиков и схем, можно выполнить решение на чистых листах А4 и загрузить фото/скан работы **в конце состязания** (на это у вас будет 15 минут). Полученный ответ выписывается в конце решения и отдельно обводится в рамку.

Во время выполнения заданий вы можете:
– пользоваться черновиком (в качестве черновика разрешено использовать чистые листы бумаги, перед началом олимпиады покажите их на камеру);
– использовать встроенный в систему калькулятор;
– использовать таблицы математической статистики. Справочный материал можно открыть на новой вкладке/в новом окне, это не будет считаться нарушением. Использование других справочных материалов и сторонних ресурсов строго запрещено.

Нажмите, чтобы открыть справочные материалы

Верим в ваш успех!

Вопрос **1**

Балл: 10,00

Найдите объем тела, которое ограничено поверхностью:

$$x^2 + (1 - y^2 - z^2)^2 = 1,$$

и площадь его сечения плоскостью z=0.

Вопрос **2**

Балл: 10,00

На семинаре по линейной алгебре преподаватель вывел формулу для A^n , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Однако, почерк у преподавателя плохой, а еще он быстро стёр ответ, чтобы начать новую тему. Общими усилиями студенты группы смогли восстановить по своим записям, что

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -2n & 2n \\ 2n & p(n) & q(n) \\ 2n & -2n^2 & 2n^2+1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, они помнят, что p(n) и q(n) были многочленами не выше второй степени. Помогите студентам найти явный вид p(n) и q(n).

Вопрос 3

Балл: 10,00

Найдите методом наименьших квадратов оценку $\widehat{\theta}$ в модели $Y_i = \theta/x_i + \varepsilon_i$

Вопрос 4

Балл: 10,00

Сколько существует четверок множеств A, B, C, D, таких, что A ∪ B ∪ C ∪ D = {1, 2, 3, . . . 2024}, а A ∩ B ∩ C ∩ D непусто? Ответ должен быть замкнутой формулой, т.е. не содержать знаков суммы, произведения, троеточий и т.д.

Вопрос 5

Балл: 10,00

Обозначим через *adj(A)* присоединённую матрицу для матрицы A. Напомним, что коэффициенты $c_{i,j}$ присоединённой матрицы равны $A_{j,i}$, где $A_{i,j}$ - алгебраическое дополнение элемента $a_{i,j}$ матрицы A. Другими словами, $A_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$, где $M_{i,j}$ - дополнительный минор элемента $a_{i,j}$, т.е. определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца. Для матрицы

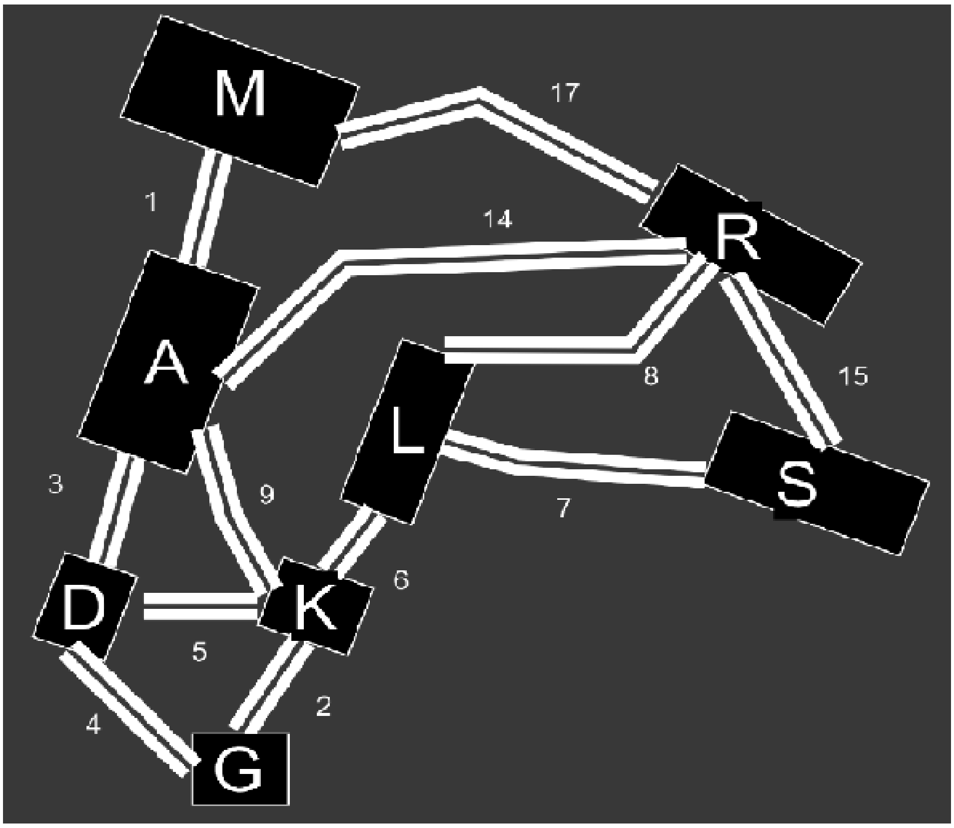
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -10 \\ 2 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

найдите *adj (adj(A))*.

Вопрос 6

Балл: 10,00

Ко дню открытых дверей университету нужно разработать систему навигации в учебном комплексе на Покровке, которая позволит не заблудиться по пути из одного корпуса в другой. Каждый указатель состоит из названий корпусов, в которые можно попасть если пойти вперед и названия корпусов, в которые можно попасть если пойти назад, указатели нужно ставить в прямой видимости друг от друга метров. Схема корпусов и необходимое количество указателей между ними указаны на схеме ниже.



Накануне дня открытых дверей оказалось, что поставщик поднял цены, поэтому было принято решение закупить минимально необходимое количество указателей чтобы абитуриенты могли попасть в любой корпус из любого другого корпуса.

(1) 2 балла: укажите необходимое количество табличек для закупки.
(2) 8 баллов: докажите, что предложенное решение оптимально.

Вопрос 7

Балл: 10,00

Наивный способ вычисления x^n заключается в вычислении $x \times x \times \ldots \times x$, что требует $n - 1$ умножений. Но есть и более эффективные алгоритмы.

Алгоритм 1:

· Если $n=1$, ответить x.

· Если $n > 1$, рекурсивно вычислить $y := x^{[n/2]}$ и ответить либо $y \times y$, если n четное, либо $y \times y \times x$ иначе.

Алгоритм 2:

· Если $n=1$, ответить x.

· Если n простое, рекурсивно вычислить $y := x^{n-1}$ и ответить $x \times y$;

· Иначе, рекурсивно вычислить $y := x^{p}$, где p - наименьший простой множитель n, затем рекурсивно вычислить $y^{n/p}$ - вот и ответ.

Задачи.

1. Найдите количество умножений, выполняемых каждым алгоритмом для $n=15$, 23 и 33.
2. Покажите, что для $n=23$ можно выполнить еще меньше умножений, чем эти два алгоритма (укажите явный способ сделать это и число выполняемых умножений).

Вопрос 8

Балл: 10,00

Существует ли такое дерево, что множество его центров не изменится при добавлении любого ребра и вершины?

Вопрос 9

Балл: 10,00

Рассмотрим язык логики первого порядка с двуместным функциональным символом +, одноместным функциональным символом f и двуместным предикатным символом равенства (=). Формально язык задаётся следующим образом: атомарные формулы имеют вид u = v, где u и v - выражения (термы), построенные из переменных с помощью символов + и f, например: f(x+y) = f(f(x)) + f(y). Сложные формулы строятся из атомарных с помощью логических связок (и, или, не, импликация) и кванторов ("для любого" и "существует"). Переменные, не связанные кванторами, называются свободными.

Рассмотрим интерпретацию данного формального языка на множестве действительных чисел: равенство и знак + интерпретируются стандартным образом, а функциональный символ f - как операция возведения в куб. Существует ли формула F(x,y,z) со следующим свойством: F(a,b,c) истинна тогда и только тогда, когда ab = c? (Иначе говоря, выразима ли в операция умножения действительных чисел через сложение и возведение в куб?)

Вопрос 10

Балл: 10,00

В процессе машинного обучения часто используется метод максимального правдоподобия. У нас есть n испытаний с k возможными типами исходов {1, 2, ..., k}. Предположим, что мы наблюдаем $X_1, ..., X_k$, где каждый X_i — это количество исходов типа i. Если p_i означает вероятность того, что испытание имеет исход i, то $(X_1, ..., X_k)$ имеет мультиномиальное распределение с параметрами $p_1, ..., p_k$, обозначаемое $(X_1, ..., X_k) \sim \text{Multinomial}(p_1, ..., p_k)$. Функция вероятности мультиномиального распределения задается следующим образом:

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\dots x_k!} p_i^{x_1} \dots p_k^{k}$$

Мы хотим найти функции максимального правдоподобия для $p_1, ..., p_k$. Примем что $p_i >$ 0 для всех p.

a) Найдите log-likelihood функцию $l(p_1,...,p_k|X_1,...,X_k)$.

b) Вы можете заметить, что неограниченная максимизация этой функции приводит к ответу, в котором мы задаем для каждого $p_i = \infty$. Но это неправильно. Мы должны добавить ограничение, чтобы вероятности в сумме равнялись 1. Теперь мы имеем следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{p_1,\dots,p_k} l(p_1,\dots,p_k|X_1,\dots,X_k), \qquad \text{при условии что} \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

Найдите функции максимального правдоподобия для $p_1,...,p_k$ используя метод множителей Лагранжа.

Вопрос 11

Балл: 10,00

Некий меценат решил создать фонд для поддержки и развития российский математики. Ежегодно фонд на конкурсной основе будет выдавать годовые гранты 50 математикам. Сколько денег необходимо вложить меценату в фонд (уставной капитал), чтобы фонд мог без дополнительного финансирования функционировать 50 лет, используя для выплаты грантов только уставной капитал и доходы от его инвестирования. В начале работы фонда размер каждого гранта составляет один миллион рублей, а в дальнейшем размер гранта индексируется на 8 процентов в год. При этом доходность от инвестиций составляет 10 процентов годовых. Для простоты считаем, что и инвестирование, и индексация гранта, а также его выплата происходят непрерывно. Фонд прекращает работу в момент, когда на его счету не останется денежных средств.

Вопрос 12

Балл: 10,00

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ - независимые случайные величины с $E(u_t) = 0$ и $D(u_t) = \sigma^2$. Известно, что ошибки $\{\varepsilon_t\}_{t=1}^{n}$ в регрессионной модели $Y_t = \beta t + \varepsilon_t$ удовлетворяют соотношению $\varepsilon_t = t u_t$,

$t = 1, \ldots, n$. Назовите виды отклонений от теоремы Гаусса-Маркова, которые содержит данная модель.

Вопрос 13

Балл: 10,00

Рассматривается регрессия

$Y_i = \alpha + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, 160$.

(a) Составьте уравнение вспомогательной регрессии для проведения теста Уайта.

(b) Пусть T - статистика Уайта. Найдите P({T > 12.24}).