Решение заданий демонстрационного варианта 10го класса

1. Вычислите $\dfrac{0,6 \cdot (1,8 \cdot 0,5) \cdot 10}{(0,25 \cdot 8 \cdot 4) \cdot 0,375}$.

   Ответ: 1,8.
   Внимание: по регламенту олимпиады, в задаче на этой позиции требуется предоставить только ответ! Дальнейшие комментарии и решения приведены только в качестве справочной информации!

   Непосредственно проводим вычисления по правилам арифметики.

2. Билет на поезд из Перми в Казань стоит 750 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 6 литров топлива на 100 километров пути, расстояние по шоссе между этими городами составляет 800 километров, а цена топлива равна 26 рублям за литр. Найдите стоимость (в рублях) наиболее дешевой поездки для 2 человек.

   Ответ: 1248.
   Внимание: по регламенту олимпиады, в задаче на этой позиции требуется предоставить только ответ! Дальнейшие комментарии и решения приведены только в качестве справочной информации!

   Цена поездки на поезде в данной ситуации равна цене двух билетов: $750 \times 2 = 1500$ руб. На автомобиле же цена поездки будет составлять лишь стоимость затраченного в пути топлива (на одного или двух человек – без разницы), то есть $6 \cdot (800/100) \cdot 26 = 1248$ руб., что и есть цена наиболее дешёвой поездки.

3. Вычислите произведение корней уравнения $(x^2+2)^2 + x^4 = 20$.

   Ответ: -2.
   Внимание: по регламенту олимпиады, в задаче на этой позиции требуется предоставить только ответ! Дальнейшие комментарии и решения приведены только в качестве справочной информации!

   Введём обозначение $y := x^2$, тогда относительно y получаем уравнение (раскрыв скобки выражения в условии): $(y+2)^2 + y^2 = 20$, то есть $2y^2 + 4y + 4 = 20$. Упрощая, получаем стандартное квадратное уравнение: $y^2 + 2y - 8 = 0$, корни которого -4 и 2. Однако, по обозначению, y равно квадрату вещественного числа, то есть неотрицательно. Значит -4 является посторонним корнем (для данного y). Таким образом, все корни x изначального уравнения являются корнями уравнения $2 = x^2$ (так как единственный оставшийся вариант $y = 2$). Корни этого уравнения – числа $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$. Очевидно, оба подходят. Значит, произведение всех корней изначального уравнения – это произведение этих двух корней, что равно -2.

4. Найдите сумму всех целых x, при которых определена функция

   $$y = \sqrt{|x-3| \cdot (x-2)} + \sqrt{3 - |x-1|} + \sqrt{x^2 + 2x - 15}$$

   Ответ: 7.
   Внимание: по регламенту олимпиады, в задаче на этой позиции требуется предоставить только ответ! Дальнейшие комментарии и решения приведены только в качестве справочной информации!

Для ответа на вопрос необходимо и достаточно определить для каких целых значений x определены все подкоренные выражения (и сложить все полученные значения). Сделаем это по отдельности:

$\sqrt{|x-3|\cdot(x-2)}$ определено тогда и только тогда, когда выражение $|x-3|\cdot(x-2)$ неотрицательно, то есть $|x-3|\cdot(x-2)\geqslant 0$. Множитель $|x-3|$ сам по себе неотрицательный, значит, кроме ситуации, когда это выражение равно нулю, оно на знак $|x-3|\cdot(x-2)$ не влияет. Если же оно равно нулю, то и произведение также нулевое, то есть неотрицательное. Отсюда следует, что $|x-3|\cdot(x-2)\geqslant 0$ неотрицательно при $x=3$ или при $x\geqslant 2$, что можно упростить как $x\geqslant 2$.

$\sqrt{3-|x-1|}$ определено при $3-|x-1|\geqslant 0$, что равносильно условию $3\geqslant|x-1|$, что равносильно двойному неравенству $3\geqslant x-1\geqslant -3$, что, в свою очередь, равносильно $4\geqslant x\geqslant -2$.

$\sqrt{x^2+2x-15}$ определено при $x^2+2x-15\geqslant 0$, что переписывается в виде $(x+5)(x-3)\geqslant 0$, то есть $x\in(-\infty,-5]\bigcup[3,\infty)$.

Пересекая полученные множества получаем область определения $[3,4]$, куда входят ровно 2 целых значения: 3 и 4. Итог равен их сумме.

5. Точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит боковую сторону на отрезки длины 2 см и 3 см, считая от общей вершины равных сторон. Найдите площадь треугольника (в см^2).

Ответ: 12.
Внимание: по регламенту олимпиады, в задаче на этой позиции требуется предоставить только ответ! Дальнейшие комментарии и решения приведены только в качестве справочной информации!

Так как отрезки (двух возможных) касательных от точки до окружности равны, то основание этого равнобедренного треугольника равно 6 см (составлено из двух отрезков касательных, каждый из которых равен отрезку касательной длины 3 на боковой стороне). Тогда высота этого треугольника, проведённая к основанию, равна по теореме Пифагора $\sqrt{5^2-3^2}=4$. Площадь, таким образом, равна $4\cdot 6/2=12$.

6. Найдите наименьшее целое значение a, при котором один из корней уравнения $x^2+3x-a-5=0$ больше 2, а другой меньше 2.

Ответ: 6.
Внимание: по регламенту олимпиады, в задаче на этой позиции требуется предоставить только ответ! Дальнейшие комментарии и решения приведены только в качестве справочной информации!

Корни данного уравнения, согласно школьной формуле, имеют вид: $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-a-5)}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{4a+29}}{2}$. Так как квадратный корень неотрицателен (когда определён), то корень, получаемый из этой формулы вычитанием, будет заведомо отрицательным, а значит, заведомо меньше 2. Таким образом, требует проверки только второе условие – что второй корень больше 2. Перепишем и преобразуем это условие:

$\dfrac{-3+\sqrt{4a+29}}{2} > 2$, что равносильно условию $\sqrt{4a+29} > 7$, что равносильно условию $4a+29 > 49$, то есть $a > 5$. Минимальное целое число, которое удовлетворяет этому условию – это 6.

7. Точки B и C лежат на окружности с диаметром AD, а через точку D проведена касательная l к этой окружности. Обозначим как P точку пересечения прямой AB с прямой l, а Q – точку пересечения прямой AC с l. Вычислите CQ, если $AB = 46.08, AC = 28.8$ и $BP = 3.92$.

Ответ: 51,2.
Так как AD – диаметр окружности, то угол ABD равен углу ACD и равен $90°$. Тогда легко установить подобия треугольников $\Delta ACD \sim \Delta ADQ$ и $\Delta ABD \sim \Delta ABQ$. Из этих подобий получаем равенства отношения $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AD}{AQ}$ и $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AD}{AP}$. После преобразования они дают $AC \cdot AQ = AD^2 = AB \cdot AP$.

8. Найдите все такие вещественные числа x, что $[50x+97] = 50+97x$.

Ответ: 95/97; 96/97; 1.
Обозначим дробную часть выражения $50x+97$ как α. Тогда $[50x+97] = 50x+97-\alpha$. Имеем:
$50x+97-\alpha = 50+97x$. Значит $47-47x = \alpha$, при этом $0 \leqslant \alpha < 1$. Значит
$0 \leqslant 1-x < 1/47$, откуда $\dfrac{46}{47} < x \leqslant 1$.
$x = ([50x+97]-50)/97$, то есть представляется в виде $\dfrac{k}{97}$, где k – некоторое целое число. Значит $\dfrac{46}{47} < \dfrac{k}{97} \leqslant 1$ и, следовательно, $\dfrac{46\cdot 97}{47} < k \leqslant 97$. При этом левое выражение равно $94\dfrac{44}{47}$.

9. Двое играют в игру на доске 7×7 по следующим правилам. Первый игрок выбирает поле на доске и ставит туда шахматного коня. Далее каждый из игроков, начиная со второго, по очереди делают ходы этой фигурой по шахматным правилам. Выходить за пределы доски или ставить фигуру на ранее посещённое поле запрещено. Тот, кто не может сделать свой очередной шаг – проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: победу может себе гарантировать первый игрок.
Все клетки доски кроме центральной можно разбить на такие пары, что если кони поставлены на каждую из клеток пары, то они находятся под боем друг друга. Первый игрок своим первым ходом поставит коня в центральную клетку. Далее на каждый шаг второго игрока он будет отвечать ходом во вторую клетку, входящую с текущим положением коня в одну пару. По индукции, легко видеть, что после каждого очередного хода первого игрока несколько (мб ноль) выбранных пар клеток уже "использованы", а остальные – даже не задеты (т.е. обе клетки в них ранее не использовались). Таким образом, первому игроку всегда будет как ответить второму, если второй сделал свой шаг.

10. Найдите все простые числа p, для которых существуют такие целые числа m и n, что $p = m^2+n^2$ и число m^3+n^3+8mn делится на p.

Ответ: 2; 5; 13.
$m^3+n^3+8mn=(m+n)(m^2-mn+n^2)+8mn \equiv (m+n)(-mn)+8mn \mod m^2+n^2=p$. То есть $mn(8-(m+n))$ делится на m^2+n^2, которое является простым. У чисел m и n общих делителей нет (иначе они и делители p), но тогда у m (как и у n) нет общих делителей с m^2+n^2. Значит $8-(m+n)$ делится на m^2+n^2.
Для произвольных целых выполнено $m^2 \geqslant m, n^2 \geqslant n$, значит $m^2+n^2>m+n-8$. Значит, либо $m+n-8=0$, либо $m+n-8 \leqslant -p$. В первом случае m^2+n^2 чётно, но не равно 2. Значит этот случай невозможен. Во втором случае имеем $m+n-8 \leqslant -(m^2+n^2)$, то есть $8-m-n \geqslant m^2+n^2$. Отсюда получаем, что $8.5 \geqslant m^2+m+1/4+n^2+n+1/4=(m+0.5)^2+(n+0.5)^2$.
Отсюда получаем, что $|m+0.5|<3$ и $|n+0.5|<3$. Тогда каждое из чисел m, n принадлежит интервалу $[-3,2]$. При этом, по очевидным причинам, ни одно из них не равно 0. Коротким перебором значений $|m|$ и $|n|$ получаем, что простые значения для m^2+n^2 могут быть только $2, 5$ или 13. Каждое из них подходит (при $(m,n)=(1,1);(1,2);(-2,-3)$).