Решение заданий демонстрационного варианта 11го класса

1. Найдите значение выражения $x + y$, если $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 13 = 0$.

   Ответ: 1.

2. Числа a, b, c таковы, что $a : b : c = 2 : 3 : 15$. Число a уменьшили на 10%, b увеличили на 20%, а значение c – не изменили. На сколько процентов изменилось значение суммы этих трех чисел?

   Ответ: 2.

3. Укажите количество целых чисел, заключенных между корнями уравнения

$$2x^2 + 3x - 17 = 2(11 - 4\sqrt{7}) + 3(\sqrt{7} - 2) - 17$$

   Ответ: 3.

4. Найдите наименьшее целое x, при котором определена функция

$$y = \sqrt{\frac{3 + x}{x - 1}} + \sqrt{x}$$

   Ответ: 2.

5. Площадь правильного треугольника составляет $16\sqrt{3}/3$ см^2. Найдите его биссектрису (в см).

   Ответ: 4.

6. Найдите наибольшее натуральное a, при котором система уравнений $\begin{cases} \sin(x + y) = 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ имеет меньше четырех решений.

   Ответ: 2.

7. Найдите все такие положительные числа x, что

$$\frac{1}{[x]} - \frac{1}{[2x]} = \frac{1}{6\{x\}}$$

Комментарий: квадратными скобками $[x]$ обозначена функция взятия целой части числа x (то есть максимального целого числа, не превосходящего x), а фигурными скобками $\{x\}$ – дробная часть числа x, по определению равная $\{x\} := x - [x]$.

Ответ: $4/3$; $23/9$; $31/8$.
Обозначим как n целую часть числа x (то есть число $[x]$), а через α – дробную часть x (то есть $\{x\}$). Тогда по условию n целое неотрицательное число, а α – неотрицательное вещественное число, не превосходящее 1. При этом ни n, ни α, не равны 0, так как эти числа являются знаменателями дробей в выражении. Следовательно, n – натуральное число, а также выполнено $0 < \alpha < 1$.

Отметим, что $[2x] = [2n + 2\alpha]$, что, очевидно, равно $2n + [2\alpha]$, что равно либо $2n$, если $\alpha < 0.5$, либо равно $2n + 1$, если $0.5 \leqslant \alpha < 1$. Рассмотрим эти два случая отдельно.

I. Если $\alpha < 0.5$, то выражение из условия имеет вид $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{6\alpha}$, то есть $\frac{1}{2n} = \frac{1}{6\alpha}$, откуда, "перевернув" дроби (рассмотрев выражение 1 делить на левую и 1 делить на правую части), имеем $2n = 6\alpha$, то есть $n/3 = \alpha$. Таким образом, $0 < n/3 = \alpha < 0.5$ для натурального n. Легко проверить, что подходит только $n = 1$: для бóльших значений $n/3$ будет не менее 0.5. При $n = 1$ получаем $\alpha = 1/3$, а число x равно $4/3$. Легко проверить, что это число является решением уравнения.

II. Если $0.5 \leqslant \alpha < 1$, то выражение принимает вид $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{6\alpha}$, то есть $\frac{n+1}{n(2n+1)} = \frac{1}{6\alpha}$. После "переворачивания" дроби имеем: $6\alpha = \frac{2n^2+n}{n+1} = 2n - 1 + \frac{1}{n+1}$, то есть

$$\alpha = \frac{2n - 1 + \dfrac{1}{n+1}}{6}$$

и это выражение должно быть не менее 0.5 и менее 1. Перепишем это в виде двойного неравенства: $3 = 0.5 \cdot 6 \leqslant 2n - 1 + \frac{1}{n+1} < 1 \cdot 6 = 6$. При $n = 1$, как легко видеть, не выполняется левое условие, а при $n \geqslant 4$ не выполняется правое (тут удобно заметить, что $0 < \frac{1}{n+1} < 1$). При $n = 2$ и $n = 3$, напротив, оба неравенства выполняются. Первое из них даёт $\alpha = \frac{5}{9}$ и $x = \frac{23}{9}$, второе даёт $\alpha = \frac{7}{8}$ и $x = \frac{31}{8}$.

8. Угол B треугольника ABC равен $60°$, а угол C этого треугольника равен $54°$. На стороне BC отметили такую точку P, что периметр четырёхугольника $ACPM$ равен периметру треугольника PMB, где M – середина AB. Найдите величину угла MPB.

Ответ: $27°$.
Обозначим буквой N середину дуги BCA описанной окружности треугольника ABC, а точка Q – такая точка на отрезке PB, что $QB = AC$. Отметим, что такая точка Q найдётся, так как из условия равенства периметров имеем соотношение на длины сторон: $AC + CP + PM + MA = BP + PM + MB$. Слагаемое PM общее, а слагаемые AM и MB равны, так как M середина отрезка AB. Сокращая, имеем $AC + CP = BP$ (как иногда говорят – точка P делит ломаную ACB пополам). Отсюда имеем $BP > AC$, то есть на BP можно отмерить ровно AC.

Покажем, что треугольники ACN и BQN равны. Действительно: стороны AC и BQ равны по построению, AN и BN равны, так как N – середина дуги, а значит, лежит на серединном перпендикуляре к AB, а углы CAN и QBN $(= \angle CBN)$ равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу (CN) описанной окружности исходного треугольника. По первому признаку, треугольники ACN и BQN равны.

Точка P, очевидно, является серединой отрезка CQ по построению (так как P середина ломаной, а части AC и BQ равны). Отрезки CN и QN равны из равенства треугольников из предыдущего абзаца. Значит, NP – медиана равнобедренного треугольника CNQ, а значит, также и высота.

Точка M, как середина отрезка AB, лежит на его серединном перпендикуляре. N также на нём лежит, как отмечалось ранее. Значит, прямая NM и есть серединный перпендикуляр (очевидно, что M и N не совпадают), откуда $\angle NMB = 90°$.

Таким образом, $\angle NMB = \angle NPB = 90°$. Значит, по признаку, четырёхугольник $PNBM$ вписанный, а угол MPB равен углу MNB. Угол MNB, в свою очередь, равен половине угла ANB равнобедренного треугольника ANB. А угол ANB равен углу ACB, то есть $54°$, как вписанные. Значит, угол MPB равен половине от $54°$, то есть $27°$.

9. В спортзале бегает 71 первоклассник. Старшеклассникам Коле и Сергею дали список этих школьников и попросили занести их в таблицу в порядке возрастания роста (известно, что они все различного роста). Коля и Сергей решили выполнить это задание так: Коля называет любых трёх первоклассников по списку, а Сергей их ловит, сравнивает по росту и сообщает Коле кто из троих по росту средний (Коля сам не смотрит, а только слушает ответы Сергея). Какое максимальное количество школьников Коля сможет гарантированно поставить в списке на правильную позицию (по возрастанию) после 1225 вопросов?

Ответ: только 1 (средний).
Сначала покажем, что за любое количество вопросов возможно достоверно определить не более одного школьника. Действительно, если рассмотреть другую группу из 71го человека, в которой (условно) имена всех школьников те же, что и в первой группе, но рост идёт в обратном порядке (т.е. если Иван Петров самый высокий в первой группе, то его тёзка будет самым низким во второй, и т.д.), то на все вопросы Коли Сергей даст в обеих группах абсолютно одинаковые ответы. Тогда если бы был способ установить порядковый номер (по росту) какого-то школьника в первой группе, то, с одной стороны, и во второй группе этот способ должен был бы работать (так как вопрос про универсальный метод, работающий для произвольной группы из 71го человека). С другой стороны, ответы на вопросы этого способа давали бы идентичную информацию про человека с номером i в первой группе и с номером $72 - i$ во второй группе. Значит, невозможно отличить эти два случая друг от друга (так как заранее не известно, даже какая из этих двух групп рассматривается). Таким образом, ответ может быть однозначен только если $i = 72 - i$, то есть $i = 36$, а это и есть номер среднего по росту человека.

Теперь покажем каким образом за 1225 вопросов можно установить центрального по росту человека. Мы добьёмся этого многократным повторением такой процедуры:
Утверждение: Пусть даны k школьников, тогда за $k-2$ вопроса можно определить пару из самого низкого и самого высокого школьников этой группы (без требования указать кто из них самый низкий, а кто – самый высокий).
Этого можно добиться таким образом: первый вопрос произвольный, а после каждого последующего ответа Коля мысленно “вычёркивает” тех школьников, кто является средним в ответе. Очевидно, что самого низкого и самого высокого учеников таким образом “вычеркнуть” не получится, при этом если невычеркнутых учеников осталось более двух, то можно продолжать задавать вопросы и вычёркивать. То есть процесс остановится только когда невычеркнутых учеников останется не более двух (то есть, в данной ситуации, ровно двух). Так как за шаг “вычёркивается” 1 ученик, то чтобы осталось только двое нужно $k-2$ вопроса.

Применяя эту процедуру, будем на каждом этапе процесса находить крайних (самого высокого и самого низкого) учеников. На первом этапе – из всех школьников группы, на следующем этапе – среди всех кроме только что найдённых самого высокого и самого низкого, на ещё следующем – без ранее найденных 4х человек, и так далее – после каждого следующего этапа из текущей группы будем удалять самых высокого и низкого на данный момент.

Если все этапы будут выполнены, то очевидно, что останется только один, средний по росту школьник. Сколько для этого необходимо вопросов? Согласно утверждению и описанию процесса нахождения среднего, на весь процесс требуется $69 + 67 + 65 + \ldots + 1$ вопросов. Это хорошо известная сумма (кроме того, что это арифметическая прогрессия) – она равна $((69+1)/2)^2 = 35^2 = 1225$. То есть ребятам достаточно вопросов, чтобы определить центрального по росту школьника.

10. Натуральные числа m и n таковы, что $3^m - 2^n$ делится на 47. Какой остаток может давать число $4m + n$ при делении на 23?

Ответ: 0.

Установим несколько полезных соотношений между степенями 2^s и 3^t по модулю 47 (для целых s и t). Выписывая первые степени можно установить следующие нетривиальные соотношения: $81 + 47 = 128$, то есть $3^4 \equiv 2^7 \mod 47$, а также $3^5 \equiv 2^3 \mod 47$. Отсюда получаем, что $2^4 = 2^7/2^3 \equiv 3^4/3^5(\mod 47) = 3^{-1}(\mod 47)$. Последние два выражения (и последующие) следует рассматривать как операции над остатками в так называемом *поле остатков по модулю простого числа* 47. Известно, что для этих чисел однозначно определены операции сложения, вычитания, умножения и деления на ненулевой остаток. Вследствие этого легко определить отрицательные степени как 1 делить на соответсвующую положительную степень, т.е. $3^{-1} \equiv 1/3 \mod 47$. *Это стандартные факты теории чисел, тем не менее, опускаемые в стандартной школьной программе. Те же рассуждения можно провести просто зная, что такое остатки по модулю числа, но не зная про поля по модулю простого числа. В случае, если эта теория неизвестна, настойчиво рекомендуем найти соответствующую информацию и задачи для отработки в множестве открытых источников.*

Итого, продолжая цепочку сравнений, имеем, что $2^4 \equiv 3^{-1} \mod 47 \equiv \dfrac{1}{3} \mod 47 \equiv \dfrac{1+47}{3} \mod 47 = 16$ (последние два равенства нужны скорее для того, чтобы перепроверить, что искомы остаток есть и выписать его в явном виде, однако далее он не пригодится). Поделив 1 на это сравнение (в поле остатков по модулю 47), имеем также сравнение $3 \equiv 2^{-4} \mod 47$.

По малой теореме Ферма имеем, что $2^{46} \equiv 1 \mod 47$ так как 47 простое. Проверим, что 2^{23} также даёт остаток 1. $2^{23} = (2^{10})^2 \cdot 2^3 = 1024^2 \cdot 8 \equiv (-10)^2 \cdot 8 \mod 47 \equiv 6 \cdot 8 = 48 \equiv 1 \mod 47$.

Отметим, что 23 – это минимальный натуральный показатель степени 2^k, который даёт остаток 1 по модулю 47. Согласно классическому рассуждению, если бы это было не так и нашлось бы k: $1 \leqslant k < 23$, то $2^{23-k}, 2^{23-2k}, \ldots$ все давали бы остаток 1 по модулю 47. Тогда либо k является делителем 23, либо найдётся ещё меньшее натуральное k_0, для которого 2^{k_0} также даёт остаток 1 по модулю 47 (для этого достаточно взять остаток от деления 23 на k). Однако 23 – простое число и только $k = 1$ является его меньшим натуральным делителем. Очевидно, что 2^1 не даёт отстаток 1, поэтому $k = 23$ – минимальная такая степень.

Тогда из изначального условия имеем: $2^n \equiv 3^m \mod 47 \equiv (2^{-4})^m = 2^{-4m} \mod 47$, то есть, домножая на 2^{4m} имеем: $2^{n+4m} \equiv 1 \mod 47$. Согласно рассуждениям, аналогичным предыдущему абзацу, получаем, что $n + 4m$ делится на минимальный натуральный показатель k для которого $2^k \equiv 1 \mod 47$. Как там же было установлено, это k равно 23, то есть $n + 4m$ может давать только остаток 0 по модулю 23.