ДЕМОНСТРАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ «МАТЕМАТИКА»

для 10 класса

Время выполнения заданий – 180 минут
Максимальная оценка – 100 баллов

Примечание:

1. В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют.

2. Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства.

3. В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа.

Задача 1. *(7 баллов)*

Вычислите $\dfrac{0{,}6 \cdot (1{,}8 \cdot 0{,}5) \cdot 10}{(0{,}25 \cdot 8 \cdot 4) \cdot 0{,}375}$.

Ответ: ____________________

Задача 2. *(7 баллов)*

Билет на поезд из Перми в Казань стоит 750 рублей на одного человека. Автомобиль расходует 6 литров топлива на 100 километров пути, расстояние по шоссе между этими городами составляет 800 километров, а цена топлива равна 26 рублям за литр. Найдите стоимость (в рублях) наиболее дешёвой поездки для 2-х человек.

Ответ: ____________________

Задача 3. *(7 баллов)*

Вычислите произведение корней уравнения $(x^2 + 2)^2 + x^4 = 20$.

Ответ: ____________________________

Задача 4. *(7 баллов)*

Найдите сумму всех целых x, при которых определена функция

$$y = \sqrt{|x-3| \cdot (x-2)} + \sqrt{3-|x-1|} + \sqrt{x^2+2x-15}$$

Ответ: ____________________________

Задача 5. *(7 баллов)*

Точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит боковую сторону на отрезки длины 2 см и 3 см, считая от общей вершины равных сторон. Найдите площадь треугольника (в см^2).

Ответ: ______________________________

Задача 6. *(7 баллов)*

Найдите наименьшее целое значение a, при котором один из корней уравнения $x^2 + 3x - a - 5 = 0$ больше 2, а другой меньше 2.

Ответ: ____________________________

Задача 7. *(13 баллов)*

Точки B и C лежат на окружности с диаметром AD, а через точку D проведена касательная l к этой окружности. Обозначим как P точку пересечения прямой AB с прямой l, а Q – точку пересечения прямой AC с l. Вычислите CQ, если $AB = 46.08$, $AC = 28.8$ и $BP = 3.92$.

Ответ: ____________________________

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

Тезисное доказательство:

Задача 8. *(13 баллов)*

Найдите все такие вещественные числа x, что $[50x + 97] = 50 + 97x$.

<u>*Комментарий.*</u> *Квадратными скобками [x] обозначена функция взятия целой части числа x (то есть максимального целого числа, не превосходящего x).*

Ответ: ______________________________

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей.

<u>**Тезисное доказательство:**</u>

Задача 9. *(16 баллов)*

Двое играют в игру на доске 7 х 7 по следующим правилам. Первый игрок выбирает поле на доске и ставит туда шахматного коня. Далее каждый из игроков, начиная со второго, по очереди делают ходы этой фигурой по шахматным правилам. Выходить за пределы доски или ставить фигуру на ранее посещённое поле запрещено. Тот, кто не может сделать свой очередной шаг – проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

Комментарий. По правилам, конь ходит так: от текущей клетки конь перемещается сначала на 2 клетки по горизонтали или вертикали, затем на 1 клетку в перпендикулярном направлении. Считается, что из начальной клетки хода в конечную клетку хода конь перемещается «прыжком».

В этой задаче требуется привести **полное доказательство:**

Задача 10. *(16 баллов)*

Найдите все простые числа p, для которых существуют такие целые числа m и n, что $p = m^2 + n^2$ и число $m^3 + n^3 + 8mn$ делится на p.

В этой задаче требуется привести **полное доказательство:**