Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются! / To be completed by the Jury. Please don't make any notes here!											
Ш И Ф Р	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Задача 8	Задача 9	Задача 10	Итого баллов
	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 7	Max 13	Max 13	Max 16	Max 16	Max 100

МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS

10 класс / 10th Grade

Вариант 1 / Variant 1

Время выполнения заданий – 180 минут / Time allowed – 180 min
Максимальная оценка – 100 баллов / Maximum grade – 100 points

ВАЖНОЕ ПРИМЕЧАНИЕ! / IMPORTANT NOTE!

1. *В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют. / Just answers are expected for problems of the first block №№ 1-6. You may use blank space after the tasks for your notes. No other notes besides the answer will affect your mark.*

2. *Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства. / Solutions for problems of the second block №№ 7-8 should contain your answer and detailed scheme of your solution with all key statements and key proof steps listed.*

3. *В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа. / Full solutions for problems of the third block №№ 9-10 are expected: an answer and detailed full proof. Solutions containing just answer without proof would be considered as incomplete (or absent) and the problem would be considered unsolved.*

Задача 1. *(7 баллов)* / **Problem 1.** *(7 points)*

Сумма первых n членов числовой последовательности a_n равна $S_n = \frac{n^2}{2009} + 2010$.

Вычислите $a_{2010} + a_{2009}$. / Consider a sequence a_n such that the sum S_n of its first n terms is given by $S_n = \frac{n^2}{2009} + 2010$ for every natural n. Find $a_{2010} + a_{2009}$.

Ответ / Answer: ____________________

Задача 2. *(7 баллов)* / **Problem 2.** *(7 points)*

Известно, что уравнение $\sqrt{x^2 + 2\sqrt{17}x + 17} + \sqrt{x^2 + 2\sqrt{3}x + 3} = a$ имеет бесконечно много корней. Определите значение a, при котором это возможно, и укажите в ответе ближайшее к нему целое число. / Given that the equation $\sqrt{x^2 + 2\sqrt{17}x + 17} + \sqrt{x^2 + 2\sqrt{3}x + 3} = a$ have infinitely many solutions with respect to x, find a, round a to the nearest integer and submit the result as an answer.

Ответ / Answer: ____________________

Задача 3. *(7 баллов) /* **Problem 3.** *(7 points)*

Вычислите площадь области, задаваемой условием $|x| + 2|y-1| \le 4$./ Find the area of the figure, given by inequality $|x| + 2|y-1| \le 4$ in the Cartesian coordinate system.

Ответ / Answer: ____________________

Задача 4. *(7 баллов)* / **Problem 4.** *(7 points)*

В прямоугольном треугольнике длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Найдите синус его большего острого угла. / Given a right-angled triangle, such that the lengths of its two legs and the hypotenuse form an arithmetic progression. Find the sinus of the largest of its acute angles.

Ответ / Answer: ____________________

Задача 5. *(7 баллов)* / **Problem 5.** *(7 points)*

Известно, что уравнение $\frac{|x-1|-|x-3|}{2}-x=ax+b$ имеет ровно 2 действительных корня. Найдите в этом случае минимально возможное значение выражения $4a^2 + 5a + b$. / Given that for a pair of real numbers *(a,b)* there are exactly two different values of x satisfying equation $\frac{|x-1|-|x-3|}{2}-x=ax+b$. What is minimal value the expression $4a^2 + 5a + b$ can take under above condition?

Ответ / Answer: ______________________

Задача 6. *(7 баллов)* / **Problem 6.** *(7 points)*

Две точки начинают одновременно двигаться равномерно по прямым Ox и Oy, пересекающимся под прямым углом. Первая точка движется со скоростью 12 м/с по прямой Ox от точки A в направлении к точке O, находящейся на расстоянии 84 м от точки A. Вторая точка движется со скоростью 5 м/с по прямой Oy от точки B в направлении к точке O, находящейся на расстоянии 100 м от точки B. Найти наименьшее расстояние (в метрах) между этими точками во время движения. / Two cars start moving with constant speeds along lines AO and BO, which form right angle AOB. The first car starts at A and moves towards O with speed 12 m/s, |AO|=84 meters. The second car starts at B and moves towards O with speed 5 m/s, |BO|=100 meters. Find the smallest distance (in meters) between these cars while moving.

Ответ / Answer: ____________________

Задача 7. *(13 баллов) /* **Problem 7.** *(13 points)*

Сколько существует целых неотрицательных чисел, имеющих в десятичной записи не более 4 знаков, сумму цифр не больше 10 и делящихся на 11? /
How many non-negative integers satisfy the following conditions: the number is a multiple of 11, it have at most 4 digits in decimal representation and the sum of its digits is at most 10?

Ответ / Answer: ____________________

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей. / In this problem you are expected to present also a scheme of your solution (thesis proof) along with the answer. Thesis proof is a list of all important steps and key statements of a proof written down without technical details.

Тезисное доказательство / Thesis proof:

Задача 8. *(13 баллов)* / **Problem 8.** *(13 points)*

Дан шестиугольник $ABCDEF$, все углы которого равны 120°, длины сторон $AB = CD = EF = 1$ и $BC = DE = FA = d$. Известно, что отношение площади треугольника ACE к площади шестиугольника $ABCDEF$ равно $2/3$. Найдите все значения, которые может принимать d. /

Given a hexagon ABCDEF, all angles of which are 120°, side lengths $AB = CD = EF = 1$ and $BC = DE = FA = d$. It is known that the ratio of the area of triangle ACE to the area of hexagon $ABCDEF$ is $2/3$. Find all the values that d can take.

Ответ / Answer: ____________________

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей. / In this problem you are expected to present also a scheme of your solution (thesis proof) along with the answer. Thesis proof is a list of all important steps and key statements of a proof written down without technical details.

Тезисное доказательство / Thesis proof:

Задача 9. *(16 баллов)* / **Problem 9.** *(16 points)*

У калькулятора есть бесконечное число пронумерованных ячеек памяти. Калькулятор умеет совершать арифметические операции с записанными в ячейках числами и записывать результат в заданную ячейку. При этом операции сложения, вычитания, умножения и деления делаются бесплатно, а за каждое извлечение квадратного корня придется заплатить 1 рубль (других операций нет). В первые 4 ячейки записаны положительные числа a, b, c, d, такие, что $a^2 > 4b$ и $c^2 > 4d$. Требуется добиться того, чтобы в сотой ячейке было написано число $x_1y_1 + x_2y_2$, где x_1, x_2 – наибольший и наименьший корни уравнения $x^2 - ax + b = 0$ соответственно, а y_1, y_2 – наибольший и наименьший корни уравнения $y^2 - cy + d = 0$ соответственно. За какое наименьшее число рублей это можно сделать? /

The calculator has an infinite number of numbered memory cells. The calculator can perform arithmetic operations with numbers in memory cells and write the result into a given cell. In this case, addition, subtraction, multiplication and division operations are done free of charge, and one have to pay 1 ruble for each square root extraction (there are no other operations). Initially the first 4 cells contain positive a, b, c, d, such that $a^2 > 4b$ and $c^2 > 4d$. It is required to get the number $x_1y_1 + x_2y_2$, written in the hundredth cell, where x_1,x_2 are the largest and smallest roots of the equation $x^2 - ax + b = 0$ respectively, and y_1, y_2 are the largest and smallest roots of the equation $y^2 - cy + d = 0$ respectively. What is the minimum amount of rubles this can be done?

Ответ / Answer: ____

В этой задаче требуется привести **полное решение/доказательство** / *In this problem you are expected to present* **a full solution:**

Задача 10. *(16 баллов)* / **Problem 10.** *(16 points)*

В казино предлагается следующая игра. Игрок начинает с пустым банком, каждый раунд бросается кубик с шестью гранями (грани выпадают с равной вероятностью), на гранях написано:

- На первых трех: казино добавляет в банк 1$, 2$ и 3$ соответственно. Можно продолжить игру.
- Казино удваивает сумму в банке. Можно продолжить игру.
- Игра закончена, но можно забрать деньги банка.
- Все деньги в банке возвращаются в казино, игра закончена.

После исполнения написанного на кубике игрок может добровольно закончить игру, забрав банк, либо начать следующий раунд. Каково матожидание выигрыша игрока при его наилучшей стратегии? /

The casino offers the following game. The player starts with an empty pot, each round a die with six sides is rolled (the sides appear with equal probability), on the sides it is written:

• On the first three: the casino adds $1, $2 and $3 to the pot, respectively. You can continue the game.

• The casino doubles the amount in the pot. You can continue the game.

• The game is over, but you can take the pot before leaving.

• All money in the pot is returned to the casino, the game is over.

After fulfilling what is written on the die (if the game is not over yet), the player can voluntarily end the game by taking the pot, or begin the next round. What is the player's expected payoff given his best strategy?

Ответ / Answer: ____

В этой задаче требуется привести **полное решение/доказательство** / *In this problem you are expected to present* **a full solution:**