

*Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются! /  
To be completed by the Jury. Please don't make any notes here!*

Ш И Ф Р	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Задача 8	Задача 9	Задача 10	Итого баллов
	Max 7	Max 13	Max 13	Max 16	Max 16	Max 100					

## МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS

**10 класс / 10<sup>th</sup> Grade**

**Вариант 2 / Variant 2**

Время выполнения заданий – 180 минут / Time allowed – 180 min

Максимальная оценка – 100 баллов / Maximum grade – 100 points

### ***ВАЖНОЕ ПРИМЕЧАНИЕ! / IMPORTANT NOTE!***

1. В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют. / Just answers are expected for problems of the first block №№ 1-6. You may use blank space after the tasks for your notes. No other notes besides the answer will affect your mark.
2. Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства. / Solutions for problems of the second block №№ 7-8 should contain your answer and detailed scheme of your solution with all key statements and key proof steps listed.
3. В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа. / Full solutions for problems of the third block №№ 9-10 are expected: an answer and detailed full proof. Solutions containing just answer without proof would be considered as incomplete (or absent) and the problem would be considered unsolved.

**Задача 1. (7 баллов) / Problem 1. (7 points)**

Найдите последнюю цифру числа  $313^{2011} - 2 \cdot 198^{2013}$ . / Find the last digit of decimal representation of the number  $313^{2011} - 2 \cdot 198^{2013}$ .

**Ответ / Answer:** \_\_\_\_\_

**Задача 2.** (7 баллов) / **Problem 2.** (7 points)

Определите количество корней уравнения  $|(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})| = 0,025$ . / How many different real solutions have the equation  $|(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})| = 0,025$ ?

**Ответ / Answer:** \_\_\_\_\_

**Задача 3. (7 баллов) / Problem 3. (7 points)**

Вычислите сумму квадратов корней уравнения  $x^2 + \frac{x}{\sqrt{4+2\sqrt{3}-3}} + \sqrt{12} = 0$ . / Calculate the sum of the squares of the roots of the equation  $x^2 + \frac{x}{\sqrt{4+2\sqrt{3}-3}} + \sqrt{12} = 0$ .

**Ответ / Answer:** \_\_\_\_\_

**Задача 4.** (7 баллов) / **Problem 4.** (7 points)

Около четырехугольника, стороны которого равны 7, 9, 13 и 11, описан круг. Точка касания вписанной в него окружности со стороной в 9 делит ее на отрезки  $x$  и  $y$ . Вычислите значение  $|x - y|$ . / Given a quadrilateral such that incircle and circumcircle both exist, and lengths of the sides of the quadrilateral are equal 7, 9, 13 and 11 (in that order). The point of tangency of the inscribed circle with side of length 9 divides this side into segments of length  $x$  and  $y$ . Find  $|x - y|$ .

**Ответ / Answer:** \_\_\_\_\_

**Задача 5. (7 баллов) / Problem 5. (7 points)**

Найдите сумму всех возможных значений  $a$ , при которых система  $\begin{cases} |x-3| + |y+5| = 1 \\ y-a = ax-3 \end{cases}$  имеет единственное решение. / Find the sum of all real numbers  $a$ , such that there is exactly one pair  $(x,y)$ , satisfying the system of equations  $\begin{cases} |x-3| + |y+5| = 1 \\ y-a = ax-3 \end{cases}$ .

**Ответ / Answer:** \_\_\_\_\_

**Задача 6. (7 баллов) / Problem 6. (7 points)**

Сельская учительница математики, желая за 4 года накопить средства на покупку внедорожника, разместила в паевом инвестиционном фонде вклад в размере 80 тыс. рублей под 25% годовых. В конце каждого из первых трех лет, после начисления ей фондом процентов, она наметила дополнительно вносить на счет одну и ту же фиксированную сумму, такую, чтобы окончательный размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 978,125%. Какую сумму (в тыс. руб.) необходимо ежегодно добавлять к вкладу? / Someone placed a deposit in a mutual fund in the amount of 80 thousand rubles at 25% per annum. At the end of each of the first three years after the fund accrues interest, the investor additionally deposits  $x$  thousand rubles into the account. By the end of the fourth year, the total deposit amounted to 978.125% of the original 80 thousand. Find  $x$  (in thousands of rubles).

**Ответ / Answer:** \_\_\_\_\_

**Задача 7. (13 баллов) / Problem 7. (13 points)**

Сколько существует целых неотрицательных чисел, имеющих в десятичной записи не более 4 знаков, сумму цифр не больше 12 и делящихся на 11? /

How many non-negative integers satisfy the following conditions: the number is a multiple of 11, it have at most 4 digits in decimal representation and the sum of its digits is at most 12?

**Ответ / Answer:** \_\_\_\_\_

*В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей. / In this problem you are expected to present also a scheme of your solution (thesis proof) along with the answer. Thesis proof is a list of all important steps and key statements of a proof written down without technical details.*

**Тезисное доказательство / Thesis proof:**

**Задача 8. (13 баллов) / Problem 8. (13 points)**

Дан шестиугольник  $ABCDEF$ , все углы которого равны  $120^\circ$ , длины сторон  $AB = CD = EF = 1$  и  $BC = DE = FA = d$ . Известно, что отношение площади треугольника  $ACE$  к площади шестиугольника  $ABCDEF$  равно  $3/4$ . Найдите все значения, которые может принимать  $d$ . /

Given a hexagon  $ABCDEF$ , all angles of which are  $120^\circ$ , side lengths  $AB = CD = EF = 1$  and  $BC = DE = FA = d$ . It is known that the ratio of the area of triangle  $ACE$  to the area of hexagon  $ABCDEF$  is  $3/4$ . Find all the values that  $d$  can take.

**Ответ / Answer:** \_\_\_\_\_

*В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей. / In this problem you are expected to present also a scheme of your solution (thesis proof) along with the answer. Thesis proof is a list of all important steps and key statements of a proof written down without technical details.*

**Тезисное доказательство / Thesis proof:**

**Задача 9. (16 баллов) / Problem 9. (16 points)**

У калькулятора есть бесконечное число пронумерованных ячеек памяти. Калькулятор умеет совершать арифметические операции с записанными в ячейках числами и записывать результат в заданную ячейку. При этом операции сложения, вычитания, умножения и деления делаются бесплатно, а за каждое извлечение квадратного корня придется заплатить 1 рубль (других операций нет). В первые 4 ячейки записаны положительные числа  $a, b, c, d$ , такие, что  $a^2 > 4b$  и  $c^2 > 4d$ . Требуется добиться того, чтобы в сотой ячейке было написано число  $x_1y_2 + x_2y_1$ , где  $x_1, x_2$  – наибольший и наименьший корни уравнения  $x^2 - ax + b = 0$  соответственно, а  $y_1, y_2$  – наибольший и наименьший корни уравнения  $y^2 - cy + d = 0$  соответственно. За какое наименьшее число рублей это можно сделать? /

The calculator has an infinite number of numbered memory cells. The calculator can perform arithmetic operations with numbers in memory cells and write the result into a given cell. In this case, addition, subtraction, multiplication and division operations are done free of charge, and one have to pay 1 ruble for each square root extraction (there are no other operations). Initially the first 4 cells contain positive  $a, b, c, d$ , such that  $a^2 > 4b$  and  $c^2 > 4d$ . It is required to get the number  $x_1y_2 + x_2y_1$ , written in the hundredth cell, where  $x_1, x_2$  are the largest and smallest roots of the equation  $x^2 - ax + b = 0$  respectively, and  $y_1, y_2$  are the largest and smallest roots of the equation  $y^2 - cy + d = 0$  respectively. What is the minimum amount of rubles this can be done?

**Ответ / Answer:** \_\_\_\_\_

*В этой задаче требуется привести полное решение/доказательство / In this problem you are expected to present a full solution:*

**Задача 10. (16 баллов) / Problem 10. (16 points)**

В казино предлагается следующая игра. Игрок начинает с пустым банком, каждый раунд бросается кубик с шестью гранями (границы выпадают с равной вероятностью), на гранях написано:

- На первых трех: казино добавляет в банк 1\$, 2\$ и 3\$ соответственно. Можно продолжить игру.
- Казино удваивает сумму в банке. Можно продолжить игру.
- Игра закончена, но можно забрать деньги банка.
- Все деньги в банке возвращаются в казино, но можно продолжить игру.

После исполнения написанного на кубике игрок может добровольно закончить игру, забрав банк, либо начать следующий раунд. Каково матожидание выигрыша игрока при его наилучшей стратегии? /

The casino offers the following game. The player starts with an empty pot, each round a die with six sides is rolled (the sides appear with equal probability), on the sides it is written:

- On the first three: the casino adds \$1, \$2 and \$3 to the pot, respectively. You can continue the game.
- The casino doubles the amount in the pot. You can continue the game.
- The game is over, but you can take the pot before leaving.
- All money in the pot is returned to the casino, but you can continue the game.

After fulfilling what is written on the die (if the game is not over yet), the player can voluntarily end the game by taking the pot, or begin the next round. What is the player's expected payoff given his best strategy?

**Ответ / Answer:** \_\_\_\_\_

*В этой задаче требуется привести полное решение/доказательство / In this problem you are expected to present a full solution:*





