

*Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются! /
To be completed by the Jury. Please don't make any notes here!*

Ш И Ф Р	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Задача 8	Задача 9	Задача 10	Итого баллов
	Max 7	Max 13	Max 13	Max 16	Max 16	Max 100					

МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS

11 класс / 11th Grade

Вариант 1 / Variant 1

Время выполнения заданий – 180 минут / Time allowed – 180 min

Максимальная оценка – 100 баллов / Maximum grade – 100 points

ВАЖНОЕ ПРИМЕЧАНИЕ! / IMPORTANT NOTE!

1. В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют. / Just answers are expected for problems of the first block №№ 1-6. You may use blank space after the tasks for your notes. No other notes besides the answer will affect your mark.
2. Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства. / Solutions for problems of the second block №№ 7-8 should contain your answer and detailed scheme of your solution with all key statements and key proof steps listed.
3. В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа. / Full solutions for problems of the third block №№ 9-10 are expected: an answer and detailed full proof. Solutions containing just answer without proof would be considered as incomplete (or absent) and the problem would be considered unsolved.

Задача 1. (7 баллов) / Problem 1. (7 points)

Известно, что число $2023 \cdot (2023^2 + a)$ делится без остатка на 6. Определите при этом условии наименьшее натуральное a . /

Find the least positive integer a , such that the number $2023 \cdot (2023^2 + a)$ is a multiple of 6.

Ответ / Answer: _____

Задача 2. (7 баллов) / Problem 2. (7 points)

Магазин закупил партию свежего инжира на 125 тыс. рублей. В конце каждой недели из четырех, что партия хранилась на складе, приходилось выбрасывать испорченные фрукты в количестве, составляющем один и тот же процент от объема, имеющегося на этот момент. Найдите этот процент, если известно, что в конце указанного срока фруктов осталось на 51,2 тыс. рублей. / The supermarket purchased a batch of fresh figs for 125 thousand rubles. This supermarket does not sell figs, just every week throws away x percent of the current lot, which spoils during storage. After four weeks the figs left were worth 51.2 thousand rubles. Find x .

Ответ / Answer: _____

Задача 3. (7 баллов) / Problem 3. (7 points)

Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = (0,2x + 1)(0,4 - 0,1x)(x - 2)(x + 3) + 1,02. /$$

Find the maximum value of the function

$$f(x) = (0,2x + 1)(0,4 - 0,1x)(x - 2)(x + 3) + 1,02$$

over all real values of x .

Ответ / Answer: _____

Задача 4. (7 баллов) / **Problem 4.** (7 points)

На катетах прямоугольного треугольника с длинами 8 и 6 как на диаметрах построены окружности. Найдите длину общей хорды этих окружностей. /

Given a right-angled triangle ABC , with legs $|AB|=8$ and $|BC|=6$. Circles O_1 and O_2 have segments AB and BC as their diameters respectively. Find the distance between two intersection points of cycles O_1 and O_2 .

Ответ / Answer: _____

Задача 5. (7 баллов) / Problem 5. (7 points)

Известно, что сумма целочисленных решений неравенства $\frac{|x-5|}{x-5} + \sqrt{a^2 - (x-3)^2} \geq 0$ равна 30.

Найдите наибольшее целое значение a , при котором это возможно. /

Find the greatest integer number a , such that the sum of all integer x satisfying the inequality

$$\frac{|x-5|}{x-5} + \sqrt{a^2 - (x-3)^2} \geq 0 \text{ equals } 30.$$

Ответ / Answer: _____

Задача 6. (7 баллов) / Problem 6. (7 points)

Небольшая мебельная фирма производит книжные шкафы и серванты. На изготовление одного книжного шкафа расходуется 1 м^2 древесно-стружечной плиты; $\frac{4}{3} \text{ м}^2$ сосновой доски и 1,5 человеко-часа рабочего времени. Аналогичные данные для серванта даются числами: $1,5 \text{ м}^2$ древесно-стружечной плиты; $1,5 \text{ м}^2$ сосновой доски и 4,5 человеко-часа. Прибыль от реализации одного книжного шкафа составляет 500 рублей, а серванта — 1 200 рублей. В течение одного месяца в распоряжении фирмы имеются: 120 м^2 древесно-стружечной плиты, 150 м^2 сосновых досок и 315 человеко-часов рабочего времени. Найдите максимальную ожидаемую месячную прибыль (в рублях). /

A furniture company produces bookcases and sideboards. The production of one bookcase consumes 1 m^2 of chipboard; $\frac{4}{3} \text{ m}^2$ pine boards and 1,5 man-hours of working time. Similar data for a sideboard is: $1,5 \text{ m}^2$ of chipboard; $1,5 \text{ m}^2$ pine boards and 4,5 man-hours of working time. The sell price of one bookcase is 500 rubles, and of a sideboard is 1,200 rubles. For current month the company has following resources: 120 m^2 of particle board, 150 m^2 of pine boards and 315 man-hours of working time. Find the maximum possible income (in rubles).

Ответ / Answer: _____

Задача 7. (13 баллов) / Problem 7. (13 points)

В треугольнике ABC длины высот из вершин B и C равны $5\sqrt{2}$ и $2\sqrt{5}$, а длина медианы из вершины A равна 5. Какие значения может принимать длина стороны BC ? /

In triangle ABC the lengths of the altitudes from vertices B and C are $5\sqrt{2}$ and $2\sqrt{5}$ respectively, and the length of the median from vertex A is 5. What values can the length of side BC take?

Ответ / Answer: _____

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей. / In this problem you are expected to present also a scheme of your solution (thesis proof) along with the answer. Thesis proof is a list of all important steps and key statements of a proof written down without technical details.

Тезисное доказательство / Thesis proof:

Задача 8. (13 баллов) / Problem 8. (13 points)

Для натурального параметра t определите, сколько пар целых неотрицательных чисел (x, y) удовлетворяют неравенству

$$1000x + 2023y \leq 2023000t.$$

/ Given a positive integer t , find the number of pairs of non-negative integers (x, y) satisfying the inequality

$$1000x + 2023y \leq 2023000t.$$

Ответ / Answer: _____

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей. / In this problem you are expected to present also a scheme of your solution (thesis proof) along with the answer. Thesis proof is a list of all important steps and key statements of a proof written down without technical details.

Тезисное доказательство / Thesis proof:

Задача 9. (16 баллов) / Problem 9. (16 points)

У калькулятора есть бесконечное число пронумерованных ячеек памяти. Калькулятор умеет совершать арифметические операции с записанными в ячейках числами и записывать результат в заданную ячейку. При этом операции сложения, вычитания, умножения и деления делаются бесплатно, а за каждое извлечение квадратного корня придется заплатить 1 рубль (других операций нет). В первые 4 ячейки записаны положительные числа a, b, c, d , такие, что $a^2 > 4b$ и $c^2 > 4d$. Требуется добиться того, чтобы в сотой ячейке было написано число $x_1/y_2 + x_2/y_1$, где x_1, x_2 – наибольший и наименьший корни уравнения $x^2 - ax + b = 0$ соответственно, а y_1, y_2 – наибольший и наименьший корни уравнения $y^2 - cy + d = 0$ соответственно. За какое наименьшее число рублей это можно сделать? /

The calculator has an infinite number of numbered memory cells. The calculator can perform arithmetic operations with numbers in memory cells and write the result into a given cell. In this case, addition, subtraction, multiplication and division operations are done free of charge, and one has to pay 1 ruble for each square root extraction (there are no other operations). Initially the first 4 cells contain positive a, b, c, d , such that $a^2 > 4b$ and $c^2 > 4d$. It is required to get the number $x_1/y_2 + x_2/y_1$, written in the hundredth cell, where x_1, x_2 are the largest and smallest roots of the equation $x^2 - ax + b = 0$ respectively, and y_1, y_2 are the largest and smallest roots of the equation $y^2 - cy + d = 0$ respectively. What is the minimum amount of rubles this can be done?

Ответ / Answer: _____

В этой задаче требуется привести полное решение/доказательство / In this problem you are expected to present a full solution:

Задача 10. (16 баллов) / Problem 10. (16 points)

На доску выписаны последовательно натуральные числа от 1 до 2^{2023} . Затем каждое четное число на доске заменяют на него же, деленное пополам, пока не получится нечетное (например, начало последовательности после всех замен выглядит 1, 1, 3, 1, 5, 3, . . .). Найдите сумму всех оставшихся на доске чисел. Ответ должен быть выражен формулой, она

не должна включать ни знака суммирования (Σ , Π или эквивалентных), ни многоточия. /

Consecutive natural numbers from 1 to 2^{2023} are written on the board. Then each even number on the board is replaced by itself, divided by 2, and this is done repeatedly until all numbers are odd (for example, the beginning of the sequence after all replacements is 1, 1, 3, 1, 5, 3, . . .). Find the sum of all numbers remaining on the board. The answer must be expressed as a formula and must not include neither a summation (Σ , Π or equivalent) nor an ellipsis.

Ответ / Answer: _____

В этой задаче требуется привести полное решение/доказательство / In this problem you are expected to present a full solution:

