

*Заполняется членами жюри. Пометки участников не допускаются! /
To be completed by the Jury. Please don't make any notes here!*

Ш И Ф Р	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Задача 8	Задача 9	Задача 10	Итого баллов
	Max 7	Max 13	Max 13	Max 16	Max 16	Max 100					

МАТЕМАТИКА / MATHEMATICS

11 класс / 11th Grade

Вариант 3 / Variant 3

Время выполнения заданий – 180 минут / Time allowed – 180 min

Максимальная оценка – 100 баллов / Maximum grade – 100 points

ВАЖНОЕ ПРИМЕЧАНИЕ! / IMPORTANT NOTE!

1. В задачах первого блока №№ 1-6 необходимо привести лишь ответ. Свободное место на странице можно использовать в качестве черновика. Дополнительные записи, помимо ответа, на оценку по этим задачам не повлияют. / *Just answers are expected for problems of the first block №№ 1-6. You may use blank space after the tasks for your notes. No other notes besides the answer will affect your mark.*
2. Решения задач второго блока №№ 7-8 необходимо записать в виде ответа и подробной схемы решения с перечислением всех ключевых утверждений и шагов доказательства. / *Solutions for problems of the second block №№ 7-8 should contain your answer and detailed scheme of your solution with all key statements and key proof steps listed.*
3. В задачах третьего блока №№ 9-10 необходимо привести полное решение: ответ (если предполагается) и полное доказательство. Без доказательства задача будет считаться нерешённой даже при наличии верного ответа. / *Full solutions for problems of the third block №№ 9-10 are expected: an answer and detailed full proof. Solutions containing just answer without proof would be considered as incomplete (or absent) and the problem would be considered unsolved.*

Задача 1. (7 баллов) / Problem 1. (7 points)

Вычислите произведение

$$\left(1 - \frac{1}{25}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{36}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{49}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{400}\right).$$

Calculate

$$\left(1 - \frac{1}{25}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{36}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{49}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{400}\right).$$

Ответ / Answer: _____

Задача 2. (7 баллов) / Problem 2. (7 points)

При любом действительном x для функции $f(x)$ имеет место $3f(3-x) + 2f(x+1) = 2x + 3$. Вычислите в таком случае $f(0) + f(4) - f(2)$. / For a function $f(x)$ the equality $3f(3-x) + 2f(x+1) = 2x + 3$ holds for every real x . Find $f(0) + f(4) - f(2)$.

Ответ / Answer: _____

Задача 3. (7 баллов) / Problem 3. (7 points)

Известно, что x_1 и x_2 - корни уравнения $2x^2 - 4ax - a + 1 = 0$, причем $a \in [-4; -3]$.

Найдите в таком случае наибольшее значение выражения $\frac{10}{59} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right)$.

Let a be a real number, moreover $a \in [-4; -3]$. By x_1 and x_2 denote the roots of the equation $2x^2 - 4ax - a + 1 = 0$, with respect to x . Find the maximum value of the expression $\frac{10}{59} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right)$ under above conditions.

Ответ / Answer: _____

Задача 4. (7 баллов) / **Problem 4.** (7 points)

Катеты прямоугольного треугольника равны $\log_4 9$ и $\log_3 16$. Вычислите его площадь. /
Given a right-angled triangle lengths of legs $\log_4 9$ and $\log_3 16$. Find the area of this triangle.

Ответ / Answer: _____

Задача 5. (7 баллов) / **Problem 5.** (7 points)

Известно, что неравенство имеет $|x-a| + |x-1| \leq 2a-2$ ровно 9 целых решений. Найдите наименьшее натуральное значение a , при котором это возможно. /

Find the least positive integer number a , such that the inequality $|x-a| + |x-1| \leq 2a-2$ have exactly 9 integer solutions with respect to x .

Ответ / Answer: _____

Задача 6. (7 баллов) / Problem 6. (7 points)

Треjder потратил треть своих денег на приобретение акций одного АО, а остальные деньги - на акции второго АО. Спустя три месяца цены акций обоих АО выросли на определенные для каждого АО проценты, а еще через три месяца цены акций выросли на столько же процентов, что и в предыдущий период. В результате за полгода общая стоимость акций трейдера выросла на 98%. Если бы после первых трех месяцев трейдер продал все акции первого АО по новой цене и на полученные деньги приобрел бы акции второго АО, то общий рост инвестиций за полгода составил бы 110%. Найдите процент прироста цены акций первого АО за 3 месяца. /

The trader spent a third of his money on purchasing shares of joint-stock company A, and the rest of the money on shares of the joint-stock company B. Every 3 months, the price of company A's shares increased x times, and the price of company B's shares increases y times. As a result, over six months the total value of the trader's shares increased by 98%. If, after the first three months, a trader would sell all the shares of company A at a new price and use the money received to purchase shares of the company B, then the total investment growth over six months would be 110%. Find the percentage increase in the price of shares of the first joint stock company over 3 months.

Ответ / Answer: _____

Задача 7. (13 баллов) / Problem 7. (13 points)

В треугольнике ABC длины высот из вершин B и C равны $5\sqrt{2}$ и $\sqrt{10}$, а длина медианы из вершины A равна 5. Какие значения может принимать длина стороны BC ? / In triangle ABC the lengths of the altitudes from vertices B and C are $5\sqrt{2}$ and $\sqrt{10}$ respectively, and the length of the median from vertex A is 5. What values can the length of side BC take?

Ответ / Answer: _____

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей. / In this problem you are expected to present also a scheme of your solution (thesis proof) along with the answer. Thesis proof is a list of all important steps and key statements of a proof written down without technical details.

Тезисное доказательство / Thesis proof:

Задача 8. (13 баллов) / Problem 8. (13 points)

Для натурального параметра t определите, сколько пар целых неотрицательных чисел (x, y) удовлетворяют неравенству

$$100x + 3737y \leq 373700t.$$

Given a positive integer t , find the number of pairs of non-negative integers (x, y) satisfying the inequality

$$100x + 3737y \leq 373700t.$$

Ответ / Answer: _____

В этой задаче, кроме ответа, требуется записать схему решения (тезисное доказательство) – список всех важных шагов и ключевых утверждений доказательства без технических деталей. / In this problem you are expected to present also a scheme of your solution (thesis proof) along with the answer. Thesis proof is a list of all important steps and key statements of a proof written down without technical details.

Тезисное доказательство / Thesis proof:

Задача 9. (16 баллов) / Problem 9. (16 points)

У калькулятора есть бесконечное число пронумерованных ячеек памяти. Калькулятор умеет совершать арифметические операции с записанными в ячейках числами и записывать результат в заданную ячейку. При этом операции сложения, вычитания, умножения и деления делаются бесплатно, а за каждое извлечение квадратного корня придется заплатить 1 рубль (других операций нет). В первые 4 ячейки записаны положительные числа a, b, c, d , такие, что $a^2 > 4b$ и $c^2 > 4d$. Требуется добиться того, чтобы в сотой ячейке было написано число $(x_1 + y_2)(x_2 + y_1)$, где x_1, x_2 – наибольший и наименьший корни уравнения $x^2 - ax + b = 0$ соответственно, а y_1, y_2 – наибольший и наименьший корни уравнения $y^2 - cy + d = 0$ соответственно. За какое наименьшее число рублей это можно сделать? /

The calculator has an infinite number of numbered memory cells. The calculator can perform arithmetic operations with numbers in memory cells and write the result into a given cell. In this case, addition, subtraction, multiplication and division operations are done free of charge, and one have to pay 1 ruble for each square root extraction (there are no other operations). Initially the first 4 cells contain positive a, b, c, d , such that $a^2 > 4b$ and $c^2 > 4d$. It is required to get the number $(x_1 + y_2)(x_2 + y_1)$, written in the hundredth cell, where x_1, x_2 are the largest and smallest roots of the equation $x^2 - ax + b = 0$ respectively, and y_1, y_2 are the largest and smallest roots of the equation $y^2 - cy + d = 0$ respectively. What is the minimum amount of rubles this can be done?

Ответ / Answer: _____

В этой задаче требуется привести полное решение/доказательство / In this problem you are expected to present a full solution:

Задача 10. (16 баллов) / Problem 10. (16 points)

На доску выписаны последовательно натуральные числа от 1 до 2^{1000} . Затем каждое четное число на доске заменяют на него же, деленное пополам, пока не получится нечетное (например, начало последовательности после всех замен выглядит 1, 1, 3, 1, 5, 3, . . .). Найдите сумму всех оставшихся на доске чисел. Ответ должен быть выражен формулой, она не должна включать ни знака суммирования (Σ , Π или эквивалентных), ни многоточия. /

Consecutive natural numbers from 1 to are written on the board. Then each even number on the board is replaced by itself, divided by 2, and this is done repeatedly until all numbers are odd (for example, the beginning of the sequence after all replacements is 1, 1, 3, 1, 5, 3, . . .). Find the sum of all numbers remaining on the board. The answer must be expressed as a formula and must not include neither a summation (Σ , Π or equivalent) nor an ellipsis.

Ответ / Answer: _____

В этой задаче требуется привести полное решение/доказательство / In this problem you are expected to present a full solution:

