



Высшая проба

ВСЕРОССИЙСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ УЧАСТНИКОВ ОЛИМПИАДЫ

Всероссийской олимпиады школьников «Высшая проба»

по профилю «Математика»

2024/2025 уч. г.

7-8 классы



ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

1. Аннотация профиля

Олимпиада по профилю «Математика» направлена на выявление талантливых школьников. Участие в олимпиаде по профилю «Математика» — это не только увлекательное испытание ваших знаний, но и отличная возможность проявить творческий подход, оценить свои силы и сделать свой первый шаг в захватывающий мир математики. Этот профиль подойдет Вам, если вы увлекаетесь математикой, любите решать задачи, изучать новые объекты и методы, проводить время за математическими головоломками, имеете высокий уровень знаний по таким школьным предметам как «алгебра», «геометрия», «вероятность и статистика».

Как и любая олимпиада высокого уровня, «Высшая проба» требует от участников не столько специфических знаний, сколько умения изобретательно применять и комбинировать знания, полученные во время основных школьных занятий, а также дополнительных занятий в формате очных кружков, дистанционных курсов или самостоятельной работы с литературой.

Для подготовки к олимпиаде «Высшая проба» Рекомендуем обратить особое внимание на варианты различных олимпиад сопоставимого уровня, в частности, на этапы Всероссийской олимпиады школьников, на международную олимпиаду «Турнир городов», на Московскую и Санкт–Петербургскую математические олимпиады.

Олимпиада «Высшая проба» по профилю «Математика» проходит в два этапа:

- **Первый этап** является отборочным. Этап проводится исключительно для отбора на следующий этап и в дальнейшем его результаты не учитываются. Отборочный этап проводится в онлайн-формате с автоматизированной проверкой ответов, где участники проходят тестирование в назначенное время. Запись решений не предполагается. Для участия в отборочном этапе необходимо предварительно зарегистрироваться.
- **Второй этап** является заключительным, именно по его результатам определяются победители и призеры. Финал олимпиады проходит в очном формате и представляет собой письменную олимпиаду, где необходимо представить на суд жюри полностью обоснованные решения заданий олимпиады. Часть заданий — задачи на вычисление каких-то элементов, часть — задачи на доказательство различных утверждений, и часть заданий содержит в себе и первое, и второе.

Приведем краткий список знаний и умений, на которые рекомендуем обратить внимание в процессе подготовки. Список не является полным перечислением всего, что может быть, а акцентирует внимание на наиболее важных для подготовки. Подразумевается, что основную школьную программу участник знает в достаточной степени. Рекомендуем ориентироваться на школьную программу, включая материал дополнительных глав учебников; на литературу, перечисленную ниже; на варианты прошлых лет олимпиад, перечисленных выше.

Общая математическая культура

- Умение ясно формулировать определения, леммы и теоремы, используемые при решении задачи.
- Умение корректно формулировать отрицания данных утверждений; утверждения, эквивалентные данным; утверждения, являющиеся следствиями данных.

- Знание основных принципов и методов доказательств утверждений. Например, понимание, что рассмотрение частных случаев не является доказательством общего утверждения. Или еще например, задача с формулировкой «можно ли» требует или контрпримера, в одном случае, или доказательства в другом. Или ответ на вопрос про наибольшее или наименьшее возможное количество состоит из двух частей – примера для искомого количества и доказательства того, что большим (меньшим) обойтись нельзя.

Участие в олимпиаде по профилю «Математика» — это не только увлекательное испытание ваших знаний, но и отличная возможность проявить нестандартный подход, оценить свои силы и сделать первый шаг в захватывающий мир математики.

2. Структура варианта и типы олимпиадных заданий

Олимпиада по профилю «Математика» проводится для учеников 7–11 классов. Ученики младших классов также допускаются к состязанию, но им необходимо решать задачи за выбранный класс.

2.1. I этап (отборочный).

Типы заданий.

- В рамках отборочного этапа по профилю «Математика» присутствуют только задания с открытым ответом.
- Ответ может быть представлен в виде целых или действительных чисел в диапазоне $[-\infty, +\infty]$, а также в виде буквенных обозначений латинского алфавита или кириллицы.
- Некоторые задания могут содержать внутри себя несколько вопросов, на которые необходимо дать ответ.

Количество, сложность заданий и вес заданий в итоговой оценке:

- Общее количество заданий отборочного этапа – 8.
- Сложность заданий увеличивается с номером задачи.
- Баллы по заданиям указаны в соответствии с уровнем сложности.

Критерии оценивания заданий:

- Оценивается правильность внесенного ответа в формате, указанном в задании.

2.2. I этап (заключительный).

Типы заданий:

- В рамках заключительного этапа по профилю «Математика» присутствуют только задания с открытым ответом. Решение задач производится на бумажных листах без использования компьютера.
- Задания могут содержать в себе вопросы, объединяющие в себе различные разделы математики.
- Нахождение каждого ответа должно сопровождаться подробной аргументацией. Участником должны быть приведены все необходимые для объяснения логики решения графики, рисунки, формулы, аналитические обоснования.

- Решение каждого задания должно заканчиваться ясной формулировкой ответа в соответствии с условиями задачи. Ответ может быть представлен в любой форме, которая соответствует условиям задачи.
- В ответе указываются величины измерений, если это требуется в условии задачи.
- Некоторые задания могут содержать внутри себя несколько вопросов, на которые необходимо дать ответ. Каждый отдельный вопрос может быть решен независимо от других и соответственно оценен.
- Каждое задание может быть решено частично, выполненная часть задания будет оценена.

Количество, сложность заданий и вес заданий в итоговой оценке:

- Общее количество заданий заключительного этапа – 6.
- За первые 4 задания максимальный балл– 15, за задания 5-6 максимальный балл– 20.

Критерии оценивания заданий:

- Оценивается верность ответа в указанном в задании формате.
- Оценивается логика решения задачи и качество обоснования решения задачи с представлением всех необходимых для объяснения логики решения графиков, рисунков, формул, аналитических обоснований.
- Оценивается корректность выполнения арифметических операций и вычислений.
- В каждой задаче критерии оценивания могут быть уточнены и конкретизированы в соответствии с критериями оценивания, описанными выше. Частичные продвижения в решении задания оцениваются промежуточными баллами.

3. Перечень и содержание тем.

Для участников 7-8 классов.

3.1. Элементарные функции и графики.

3.1.1. Элементарные функции

Декартова прямоугольная система координат.

Понятие функции. Область определения, множество значений, график.

Линейная функция, прямая. Уравнение прямой в различных формах. Угловой коэффициент прямой.

Условия параллельности двух прямых на плоскости.

Условия перпендикулярности двух прямых на плоскости.

3.2. Алгебраические уравнения.

3.2.1. Линейные и приводимые к ним уравнения

Линейные уравнения без параметра и с параметром.

Методы решения дробно-рациональных уравнений.

3.2.2. Алгебраические уравнения старших степеней

Методы разложения на множители для уравнений старших степеней.

Уравнения, содержащие знак абсолютной величины.

3.3. Алгебраические неравенства.

3.3.1. Свойства алгебраических неравенств

Числовые неравенства. Равносильные преобразования неравенств.

Линейные неравенства.

Неравенства, содержащие модуль и несколько модулей.

Тождественные неравенства.

Среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел.

Свойства суммы двух взаимно обратных чисел.

3.3.2. Метод интервалов

Метод интервалов для решения линейных неравенств.

3.4. Системы алгебраических уравнений.

3.4.1. Системы линейных уравнений

Понятие равносильных систем, понятие следствия.

Системы линейных алгебраических уравнений, имеющие единственное решение.

Графический метод. Метод исключения неизвестных. Метод алгебраических преобразований.

Вычисление линейной функции от решения линейной системы методом алгебраических преобразований.

Простые текстовые задачи, приводящие к линейным системам.

Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, не имеющие решений или имеющие бесконечное множество решений. Геометрическая интерпретация.

Линейные системы с параметром. Условие единственного решения, отсутствия решений, бесконечного числа решений.

Системы, приводящиеся к линейным с помощью замены переменной.

3.5. Алгебраические выражения.

3.5.1. Формулы сокращенного умножения

Формулы сокращенного умножения и деления.

Преобразование выражений с модулями.

Разложение на множители числовых выражений.

Разложение на множители выражений с параметрами.

Деление многочленов с остатком.

Преобразование дробно-рациональных выражений.

Алгебраические выражения.

Понятие проверки решения. Эффективные методы проверки.

3.6. Натуральные, целые, действительные числа.

3.6.1. Целые, рациональные, действительные числа.

Деление натуральных чисел с остатком и без остатка.

Простые числа. Разложение натурального числа на простые множители. Основная теорема арифметики.

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД.

Десятичная запись натуральных и целых чисел.

Системы счисления

Признаки делимости. Признаки делимости на составные числа.

Множество действительных чисел, числовая прямая. Сравнение действительных чисел.

Модуль действительного числа.

Арифметические действия над обыкновенными и десятичными дробями.

3.6.2. Уравнения в целых числах и арифметика остатков.

Линейные уравнения в целых числах (диофантовы уравнения).

Системы линейных уравнений в целых числах.

3.6.3. Текстовые задачи с целочисленными решениями.

Понятие объединения и пересечения множеств.

Подсчет количества элементов множества, обладающих одновременно двумя свойствами.

Подсчет количества элементов множества, обладающих одним из двух свойств.

3.7. Текстовые задачи.

3.7.1. Понятие процентного отношения.

Понятие процентного отношения.

Двукратное применение процентного отношения.

Изменение процентного содержания одной из компонент в двухкомпонентной системе.

Изменение процентного содержания одной из компонент в многокомпонентной системе.

3.7.2. Задачи на движение.

Графическое изображение условий задачи.

Элементарные задачи на движение одного объекта.

Движение двух объектов с разными скоростями.

Движение вниз и вверх по реке.

Движение нескольких объектов по реке.

Движение по замкнутой траектории (окружности).

3.7.3. Понятие производительности труда.

Работа и производительность труда одного участника.

Совместная работа и производительность труда нескольких участников.

Повышение и понижение производительности труда и связанное с этим изменение времени выполнения.

3.7.4. Смеси и сплавы.

Вычисление концентрации смеси двух растворов.

Вычисление концентрации смеси трех растворов.

Максимальные и минимальные значения концентрации при смешивании.

3.8. Планиметрические задачи, треугольники.

3.8.1. Прямоугольный и равнобедренный треугольники

Прямоугольный треугольник.

Равнобедренный треугольник.

3.8.2. Биссектриса треугольника

Основные свойства биссектрисы.

Вычисление длины биссектрисы.

3.8.3. Медиана и высота треугольника

Основные свойства медианы. Вычисление длины медианы.

Основные свойства высоты. Вычисление длины высоты.

3.8.4. Площадь треугольника

Вычисление площади по двум сторонам и углу между ними.

Вычисление площади по стороне и двум прилежащим углам.

Вычисление площади по трем сторонам. Формула Герона.

3.8.5. Полезные факты про треугольник.

Четыре признака «равенства» треугольника.

Перекладывание отрезков. Удвоение медианы.

Неравенство о соотношении углов и сторон в треугольнике. Неравенство треугольника.

3.8.6. Многоугольники.

Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат.

Трапеция.

Многоугольники на решетке. Формула Пика.

3.9. Теория вероятностей и комбинаторика.

3.9.1. Теория вероятностей

Случайные события. Среднее значение, медиана, отклонения, дисперсия.

Математическое описание случайных явлений. Элементарные события и их вероятность.

Правило вычисления вероятности.

Основы теории множеств: объединение, пересечение множеств, диаграммы Эйлера.

Применение теории множеств для вычисления вероятности. Вероятность противоположного события. Объединение и пересечение событий.

3.9.2. Комбинаторика и логика

Правило умножения и правило сложения в комбинаторике.

Основные задачи комбинаторики: подсчёт числа перестановок и сочетаний.

Полный перебор, грамотная организация перебора.

Идея упорядочивания в комбинаторных и алгебраических задачах.

Решения задач от противного и принцип Дирихле.

Круги Эйлера и формула включений-исключений.

Логические задачи. Анализ истинных и ложных высказываний. Таблицы истинности.

Задачи про рыцарей и лжецов. Задачи про мудрецов.

Четность: арифметика, разбиение на пары, чередование.

Алгоритмы и конструктивы: переправы, переливания, взвешивания.

Подсчет числа способов. Задачи на соответствия. Правила сложения и умножения.

4. Рекомендуемая литература и другие источники

Приведем список литературы и ресурсов в сети Internet, которые могут быть полезны в процессе подготовки. Хороших книг и отличных сайтов много, но мы предпочли сделать наш список как можно более компактным, чтобы он служил ориентиром того, на что, на наш взгляд, следует обратить внимание в первую очередь. Для того, чтобы сформировалась более цельная картина, мы не стали разбивать список на классы. Все ресурсы содержат адекватные описания, у вас не вызовет затруднения, изучая соответствующие материалы, понять целевую аудиторию конкретных мероприятий, курсов, литературы.

4.1. Информационные ресурсы и сайты олимпиад

- olimpiada.ru — крупнейший информационный портал об олимпиадах в России
- vos.olimpiada.ru — сайт с информацией об этапах Всероссийской олимпиады школьников в городе Москве
- siriusolymp.ru — сайт школьного этапа Всероссийской олимпиады, проводимого Образовательным центром «Сириус»
- rsr-olymp.ru — сайт Российского совета олимпиад школьников
- mcsme.ru — сайт Московского центра непрерывного математического образования
- turgor.ru — сайт Международного математического «Турнира городов»
- olympiads.mcsme.ru/matprazdnik — сайт «Математического праздника» для 6 и 7 классов

- mmo.mcsme.ru — сайт Московской математической олимпиады
- olymp.hse.ru/mmo — сайт олимпиады «Высшая проба»
- www.etudes.ru — сайт проекта «Математические этюды»

4.2. Дистанционные курсы

- edu.sirius.online — бесплатные онлайн-курсы Образовательного центра «Сириус»

4.3. Базы задач

- problems.ru — база задач с решениями, каталогизацией и поиском.
- zadachi.mcsme.ru — информационно-поисковая система «Задачи по геометрии»

4.4. Интернет–библиотеки

- ilib.mcsme.ru и mcsme.ru/free-books — библиотеки математической литературы. Ряд книг, перечисленных ниже, доступны бесплатно на этих ресурсах

4.5. Печатная учебная литература

- Серия книг «Школьные математические кружки»
- Сайт журнала «Квантик» kvantik.com
- Архив номеров журнала «Квант» kvant.mcsme.ru
- Р. К. Гордин. Это должен знать каждый матшкольник. mcsme.ru/free-books/pdf/gordin.pdf
- А. Канель-Белов, А. Ковальджи. Как решают нестандартные задачи mcsme.ru/free-books/olymp/KanKov.pdf
- «Ленинградские математические кружки» С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин
- Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. Алгебра и теория чисел для математических школ mcsme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf
- В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии mcsme.ru/free-books/prasolov/planim5.pdf
- В. В. Прасолов Задачи по стереометрии
- В. В. Прасолов. Задачи по алгебре, арифметике и анализу mcsme.ru/free-books/prasolov/algebra.pdf
- В. В. Прасолов. Многочлены www.mcsme.ru/free-books/prasolov/poly.pdf
- А. В. Акопян. Геометрия в картинках mcsme.ru/free-books/akopyan/Akopyan.pdf
- Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин Комбинаторика

4.6. Печатные сборники задач наиболее авторитетных математических олимпиад

- Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009 Заключительные этапы.
- В. В. Прасолов и др. Московские математические олимпиады 1935–1957 mcsme.ru/free-books/olymp/mmo-35-57.pdf
- В. В. Прасолов и др. Московские математические олимпиады 1958–1967
- А. В. Бегунц и др. Московские математические олимпиады 1981–1992
- Р. М. Федоров и др. Московские математические олимпиады 1993–2005 mcsme.ru/free-books/olymp/mmo1993.pdf
- Л. Э. Медников, А. В. Шаповалов Турнир городов: мир математики в задачах
- А. К. Толпыго Тысяча задач Международного математического Турнира городов
- Д. В. Фомин, К. П. Кохась Ленинградские математические олимпиады 1961–1991

- Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике. Серия книг с 2012 по 2021 годы.