



Высшая
проба

ВСЕРОССИЙСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ УЧАСТНИКОВ ОЛИМПИАДЫ
Всероссийской олимпиады школьников «Высшая проба»
по профилю «Математика»
2024/2025 уч. г.
10-11 классы



ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

1. Аннотация профиля

Олимпиада по профилю «Математика» направлена на выявление талантливых школьников. Участие в олимпиаде по профилю «Математика» — это не только увлекательное испытание ваших знаний, но и отличная возможность проявить творческий подход, оценить свои силы и сделать свой первый шаг в захватывающий мир математики. Этот профиль подойдет Вам, если вы увлекаетесь математикой, любите решать задачи, изучать новые объекты и методы, проводить время за математическими головоломками, имеете высокий уровень знаний по таким школьным предметам как «алгебра», «геометрия», «вероятность и статистика».

Как и любая олимпиада высокого уровня, «Высшая проба» требует от участников не столько специфических знаний, сколько умения изобретательно применять и комбинировать знания, полученные во время основных школьных занятий, а также дополнительных занятий в формате очных кружков, дистанционных курсов или самостоятельной работы с литературой.

Для подготовки к олимпиаде «Высшая проба» Рекомендуем обратить особое внимание на варианты различных олимпиад сопоставимого уровня, в частности, на этапы Всероссийской олимпиады школьников, на международную олимпиаду «Турнир городов», на Московскую и Санкт–Петербургскую математические олимпиады.

Олимпиада «Высшая проба» по профилю «Математика» проходит в два этапа:

- **Первый этап** является отборочным. Этап проводится исключительно для отбора на следующий этап и в дальнейшем его результаты не учитываются. Отборочный этап проводится в онлайн-формате с автоматизированной проверкой ответов, где участники проходят тестирование в назначенное время. Запись решений не предполагается. Для участия в отборочном этапе необходимо предварительно зарегистрироваться.
- **Второй этап** является заключительным, именно по его результатам определяются победители и призеры. Финал олимпиады проходит в очном формате и представляет собой письменную олимпиаду, где необходимо представить на суд жюри полностью обоснованные решения заданий олимпиады. Часть заданий — задачи на вычисление каких-то элементов, часть — задачи на доказательство различных утверждений, и часть заданий содержит в себе и первое, и второе.

Приведем краткий список знаний и умений, на которые рекомендуем обратить внимание в процессе подготовки. Список не является полным перечислением всего, что может быть, а акцентирует внимание на наиболее важных для подготовки. Подразумевается, что основную школьную программу участник знает в достаточной степени. Рекомендуем ориентироваться на школьную программу, включая материал дополнительных глав учебников; на литературу, перечисленную ниже; на варианты прошлых лет олимпиад, перечисленных выше.

Общая математическая культура

- Умение ясно формулировать определения, леммы и теоремы, используемые при решении задачи.
- Умение корректно формулировать отрицания данных утверждений; утверждения, эквивалентные данным; утверждения, являющиеся следствиями данных.

- Знание основных принципов и методов доказательств утверждений. Например, понимание, что рассмотрение частных случаев не является доказательством общего утверждения. Или еще например, задача с формулировкой «можно ли» требует или контрпримера, в одном случае, или доказательства в другом. Или ответ на вопрос про наибольшее или наименьшее возможное количество состоит из двух частей – примера для искомого количества и доказательства того, что большим (меньшим) обойтись нельзя.

Участие в олимпиаде по профилю «Математика» — это не только увлекательное испытание ваших знаний, но и отличная возможность проявить нестандартный подход, оценить свои силы и сделать первый шаг в захватывающий мир математики.

2. Структура варианта и типы олимпиадных заданий

Олимпиада по профилю «Математика» проводится для учеников 7–11 классов. Ученики младших классов также допускаются к состязанию, но им необходимо решать задачи за выбранный класс.

2.1. I этап (отборочный).

Типы заданий.

- В рамках отборочного этапа по профилю «Математика» присутствуют только задания с открытым ответом.
- Ответ может быть представлен в виде целых или действительных чисел в диапазоне $[-\infty, +\infty]$, а также в виде буквенных обозначений латинского алфавита или кириллицы.
- Некоторые задания могут содержать внутри себя несколько вопросов, на которые необходимо дать ответ.

Количество, сложность заданий и вес заданий в итоговой оценке:

- Общее количество заданий отборочного этапа – 8.
- Сложность заданий увеличивается с номером задачи.
- Баллы по заданиям указаны в соответствии с уровнем сложности.

Критерии оценивания заданий:

- Оценивается правильность внесенного ответа в формате, указанном в задании.

2.2. I этап (заключительный).

Типы заданий:

- В рамках заключительного этапа по профилю «Математика» присутствуют только задания с открытым ответом. Решение задач производится на бумажных листах без использования компьютера.
- Задания могут содержать в себе вопросы, объединяющие в себе различные разделы математики.
- Нахождение каждого ответа должно сопровождаться подробной аргументацией. Участником должны быть приведены все необходимые для объяснения логики решения графики, рисунки, формулы, аналитические обоснования.

- Решение каждого задания должно заканчиваться ясной формулировкой ответа в соответствии с условиями задачи. Ответ может быть представлен в любой форме, которая соответствует условиям задачи.
- В ответе указываются величины измерений, если это требуется в условии задачи.
- Некоторые задания могут содержать внутри себя несколько вопросов, на которые необходимо дать ответ. Каждый отдельный вопрос может быть решен независимо от других и соответственно оценен.
- Каждое задание может быть решено частично, выполненная часть задания будет оценена.

Количество, сложность заданий и вес заданий в итоговой оценке:

- Общее количество заданий заключительного этапа – 6.
- За первые 4 задания максимальный балл– 15, за задания 5-6 максимальный балл– 20.

Критерии оценивания заданий:

- Оценивается верность ответа в указанном в задании формате.
- Оценивается логика решения задачи и качество обоснования решения задачи с представлением всех необходимых для объяснения логики решения графиков, рисунков, формул, аналитических обоснований.
- Оценивается корректность выполнения арифметических операций и вычислений.
- В каждой задаче критерии оценивания могут быть уточнены и конкретизированы в соответствии с критериями оценивания, описанными выше. Частичные продвижения в решении задания оцениваются промежуточными баллами.

3. Перечень и содержание тем.

Для участников 10-11 классов.

3.1. Элементарные функции и графики.

3.1.1. Элементарные функции

Декартова прямоугольная система координат.

Понятие функции. Область определения, множество значений, график.

Четные и нечетные функции.

Периодические функции. Наименьший положительный период.

Монотонные функции. Локальный экстремум.

Преобразование графиков. Сдвиг, растяжение, зеркальная симметрия, центральная симметрия.

Линейная функция, прямая. Уравнение прямой в различных формах. Угловой коэффициент прямой.

Условия параллельности двух прямых на плоскости.

Условия перпендикулярности двух прямых на плоскости.

Квадратный трехчлен, парабола. Выделение полного квадрата.

Промежуток возрастания, промежуток убывания, точка экстремума.

Множество значений квадратного трехчлена.

Дробно-линейная функция, гипербола.

Асимптоты и оси симметрии гиперболы.

3.1.2. Элементарные функции с модулем

Преобразование модуля, примененное к аргументу.

Преобразование модуля, примененное к функции.

Композиция линейной функции и модуля.

Композиция квадратного трехчлена и модуля.

Композиция дробно-линейной функции и модуля.

3.1.3. Точки, прямые, многоугольники на плоскости

Множества на плоскости. Параллельный перенос, растяжение.

Зеркальная и центральная симметрия. Преобразование подобия.

Свойства симметрии фигур, описываемых уравнениями и неравенствами с одним и несколькими модулями.

Расстояние от точки до начала координат. Расстояние между двумя точками. Расстояние от прямой до начала координат. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми.

Фигуры на плоскости, определяемые уравнениями и неравенствами, включающими $|x|$ и $|y|$ в различных комбинациях.

3.1.4. Окружности на плоскости

Уравнение окружности.

Уравнение окружности со смещенным центром.

Уравнение окружности с модулями.

3.2. Алгебраические уравнения.

3.2.1. Линейные и квадратные уравнения

Линейные уравнения без параметра и с параметром.

Квадратные уравнения. Условие разрешимости, условие единственного решения, условие неразрешимости.

Различные формулы для корней квадратного уравнения.

Теоремы Виета.

Вычисление коэффициентов квадратного уравнения с заданными корнями.

Вычисление симметрических функций от корней через коэффициенты.

Квадратные уравнения с параметром.

Уравнения, приводящиеся к квадратным с помощью замены переменной.

Методы решения дробно-рациональных уравнений.

3.2.2. Алгебраические уравнения старших степеней

Метод понижения порядка алгебраических уравнений.

Биквадратные уравнения.

Симметрические уравнения.

Методы разложения на множители для уравнений старших степеней.

Уравнения, содержащие знак абсолютной величины.

Алгебра многочленов, теорема Безу, теорема о рациональных корнях, теорема Виета.

Разложение многочлена на неприводимые. Интерполяционный многочлен.

3.3. Алгебраические неравенства.

3.3.1. Свойства алгебраических неравенств

Числовые неравенства. Равносильные преобразования неравенств.

Линейные неравенства.

Квадратные неравенства.

Дробно-линейные неравенства.

Неравенства, содержащие модуль и несколько модулей.

Тождественные неравенства.

Среднее арифметическое и среднее геометрическое двух неотрицательных чисел.

Свойства суммы двух взаимно обратных чисел.

Неравенства о средних. Транснеравенство. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Метод Штурма. Неравенство Йенсена.

3.3.2. Метод интервалов

Метод интервалов для многочлена.

Метод интервалов для рациональной функции.

Метод интервалов для иррациональной функции.

3.4. Системы алгебраических уравнений.

3.4.1. Системы линейных уравнений

Понятие равносильных систем, понятие следствия.

Системы линейных алгебраических уравнений, имеющие единственное решение.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Графический метод. Метод исключения неизвестных. Метод алгебраических преобразований.

Вычисление линейной функции от решения линейной системы методом алгебраических преобразований.

Простые текстовые задачи, приводящие к линейным системам.

Системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, не имеющие решений или имеющие бесконечное множество решений. Геометрическая интерпретация.

Линейные системы с параметром. Условие единственного решения, отсутствия решений, бесконечного числа решений.

Системы, приводящиеся к линейным с помощью замены переменной.

3.4.2. Системы уравнений общего вида

Виетовские системы. Метод решения, условие разрешимости.

Системы, содержащие однородные уравнения.

Симметрические системы.

Метод замены переменных для решения систем.

3.5. Алгебраические выражения.

3.5.1. Формулы сокращенного умножения

Формулы сокращенного умножения и деления.

Преобразование выражений с модулями.

Разложение на множители числовых выражений.

Разложение на множители выражений с параметрами.

Деление многочленов с остатком.

Преобразование дробно-рациональных выражений.

Алгебраические выражения.

3.5.2. Иррациональные алгебраические выражения

Извлечение квадратного корня из полного квадрата числового выражения и выражения с параметром.

Сложные радикалы.

Избавление от иррациональности в знаменателе числового выражения и выражения с параметром.

Сравнение иррациональных выражений.

Числовые оценки иррациональных выражений без параметров.

3.6. Иррациональные уравнения и неравенства.

3.6.1. Основные методы решения иррациональных уравнений и неравенств

Функция, график. Область определения, множество значений. Корни третьей, четвертой и старших степеней.

Графический метод решения иррациональных уравнений и неравенств.

Метод замены переменной. Использование одной и двух новых переменных.

Использование монотонности и метод подбора при решении иррациональных уравнений и неравенств.

Функциональные уравнения и неравенства.

3.6.2. Метод равносильных преобразований

Уравнения и неравенства с полным квадратом под знаком квадратного корня.

Метод разложения на множители.

Универсальный метод решения иррациональных неравенств.

Иррациональные уравнения и неравенства.

Метод эквивалентных преобразований для иррациональных уравнений и неравенств.

Понятие эквивалентного преобразования.

Основные типы иррациональных уравнений и неравенств.

Метод неэквивалентных преобразований.

Понятие следствия.

Понятие проверки решения. Эффективные методы проверки.

3.7. Натуральные, целые, действительные числа.

3.7.1. Целые, рациональные, действительные числа.

Деление натуральных чисел с остатком и без остатка.

Простые числа. Разложение натурального числа на простые множители. Основная теорема арифметики.

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД.

Десятичная запись натуральных и целых чисел.

Системы счисления

Признаки делимости. Признаки делимости на составные числа.

Иррациональные числа. Иррациональность и некоторых других алгебраических констант.

Множество действительных чисел, числовая прямая. Сравнение действительных чисел.

Модуль действительного числа.

Арифметические действия над обыкновенными и десятичными дробями.

Приведение периодической десятичной дроби к рациональному виду. Представление рационального числа в виде периодической десятичной дроби.

3.7.2. Уравнения в целых числах и арифметика остатков.

Линейные уравнения в целых числах (диофантовы уравнения).

Системы линейных уравнений в целых числах.

Нелинейные уравнения в целых числах.

Системы нелинейных уравнений в целых числах.

Условия целочисленности рациональной функции.

Малая теорема Ферма. Теорема Вильсона. Китайская теорема об остатках. Теорема Эйлера.

3.7.3. Текстовые задачи с целочисленными решениями.

Понятие объединения и пересечения множеств.

Подсчет количества элементов множества, обладающих одновременно двумя свойствами.
Подсчет количества элементов множества, обладающих одним из двух свойств.

3.8. Текстовые задачи.

3.8.1. Понятие процентного отношения.

Понятие процентного отношения.

Двукратное применение процентного отношения.

Изменение процентного содержания одной из компонент в двухкомпонентной системе.

Изменение процентного содержания одной из компонент в многокомпонентной системе.

3.8.2. Понятие сложных процентов.

Основные закономерности сложных процентов.

Математические аспекты процесса прироста капитала в банке.

3.8.3. Задачи на движение.

Графическое изображение условий задачи.

Элементарные задачи на движение одного объекта.

Движение двух объектов с разными скоростями.

Движение вниз и вверх по реке.

Движение нескольких объектов по реке.

Движение по замкнутой траектории (окружности).

3.8.4. Понятие производительности труда.

Работа и производительность труда одного участника.

Совместная работа и производительность труда нескольких участников.

Повышение и понижение производительности труда и связанное с этим изменение времени выполнения.

3.8.5. Текстовые задачи экономической тематики.

Понятия выручки, расхода, дохода, прибыли.

Текстовые задачи на вычисление экстремальных значений в задачах экономического содержания.

Задачи, требующие выработки оптимальной стратегии.

3.8.6. Понятие спроса и предложения.

Понятие спроса и предложения.

Задачи оптимизации при заданном соотношении спроса и предложения.

3.8.7. Смеси и сплавы.

Вычисление концентрации смеси двух растворов.

Вычисление концентрации смеси трех растворов.

Максимальные и минимальные значения концентрации при смешивании.

Вычисление площади по радиусу описанного круга.

3.9. Тригонометрические функции и тригонометрические формулы.

3.9.1. Тригонометрические формулы.

Тригонометрический круг. Измерение углов в радианах и градусах. Число π .

Расположение точек 1, 2, 3, 4, 5, 6 радиан на тригонометрическом круге.

Определение тригонометрических функций числового аргумента.

Периодичность основных тригонометрических функций.

Четные и нечетные функции. Промежутки возрастания и убывания. Наибольшие и наименьшие значения, множество значений.

Графики тригонометрических функций.

Частные значения

Формулы приведения.

Формулы сложения и умножения.

Формулы двойного и половинного угла.

Вычисление тригонометрических функций для углов, кратных 15 градусов.

Преобразование тригонометрических выражений с модулями.

Корни основных тригонометрических функций. Знаки тригонометрических функций.

3.9.2. Тригонометрические функции.

Множество значений функции.

Множество значений функции.

Множество значений квадратного трехчлена с тригонометрической функцией.

Множество значений функции для.

Множество значений дробно-линейной функции с тригонометрической функцией.

3.10. Тригонометрические уравнения и неравенства.

3.10.1. Элементарные тригонометрические уравнения.

Уравнения вида, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.

Тригонометрические уравнения, разлагающиеся на множители.

Применение формул двойного и половинного угла.

Метод вспомогательного угла.

Элементарные тригонометрические неравенства.

3.10.2. Квадратные тригонометрические уравнения и неравенства.

Тригонометрические уравнения, приводящиеся к квадратным.

Тригонометрические неравенства, приводящиеся к квадратным.

Тригонометрические неравенства, разлагающиеся на множители.

Тригонометрические неравенства, решаемые методом замены переменной.

3.11. Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств.

3.11.1. Метод разложения на множители в тригонометрии.

Методы решения тригонометрических уравнений.

Применение преобразования суммы в произведение.

Применение преобразования произведения в сумму.

Отбор общих корней в нескольких сериях решений тригонометрических уравнений.

Иррациональные уравнения с тригонометрическими функциями.

3.11.2. Метод понижения порядка в тригонометрии.

Понижение порядка тригонометрических уравнений.

Метод мажорант в тригонометрии.

Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром.

Системы тригонометрических уравнений и неравенств.

3.12. Обратные тригонометрические функции.

3.12.1. Обратные тригонометрические функции, свойства и графики.

Область определения и множество значений обратных функций.

Формулы сложения обратных функций.

Композиция тригонометрической функции и обратной тригонометрической функции.

Композиция обратной тригонометрической функции и тригонометрической функции.

3.12.2. Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями.

Простейшие уравнения с обратными функциями.

Простейшие неравенства с обратными функциями.

Линейные уравнения, включающие и .
Квадратные уравнения и неравенства с обратными функциями.

3.13. Планиметрические задачи, треугольники.

3.13.1. Прямоугольный и равнобедренный треугольники

Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора.

Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике.

Равнобедренный треугольник. Вычисление радиусов вписанного и описанного круга.

3.13.2. Биссектриса треугольника

Основные свойства биссектрисы.

Вычисление длины биссектрисы.

3.13.3. Медиана и высота треугольника

Основные свойства медианы. Вычисление длины медианы.

Основные свойства высоты. Вычисление длины высоты.

Вписанная и описанная окружности.

3.13.4. Площадь треугольника

Вычисление площади по двум сторонам и углу между ними.

Вычисление площади по стороне и двум прилежащим углам.

Вычисление площади по трем сторонам. Формула Герона.

Вычисление площади по радиусу вписанного круга.

3.13.5. Полезные факты про треугольник.

Четыре признака «равенства» треугольника.

Дополнительные построения, связанные с осевой и центральной симметрией.

Перекладывание отрезков. Удвоение медианы.

Неравенство о соотношении углов и сторон в треугольнике. Неравенство треугольника.

Теоремы Чевы и Менелая.

3.14. Задачи с параметром.

3.14.1. Линейные уравнения и неравенства с параметром.

Линейные уравнения с параметром.

Линейные неравенства с параметром.

Линейные системы с параметром.

3.14.2. Квадратные уравнения и неравенства с параметром.

Квадратные уравнения, системы и неравенства с параметром.

Условия, при которых заданный промежуток расположен между корнями (вне корней) квадратного уравнения.

Условия, при которых все числа заданного промежутка являются решениями квадратного неравенства.

Системы квадратных неравенств с параметром.

3.14.3. Уравнения с параметром в правой части.

Уравнения с параметром в правой части.

Связь со множеством значений.

Уравнения и неравенства с ограничениями, зависящими от параметра.

Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами.

3.14.4. Квадратные уравнения и неравенства относительно параметра.

Квадратные уравнения относительно параметра.

Алгебраические уравнения старших степеней, которые можно рассматривать как квадратные уравнения относительно параметра.

Тригонометрические уравнения относительно параметра.
Показательные уравнения относительно параметра.
Иррациональные уравнения относительно параметра.
Решение уравнений и неравенств на плоскости (параметр, переменная).

3.15. Графические методы решения уравнений и систем с параметром.

3.15.1. Графические методы решения уравнений и неравенств. Многоугольники.

Пересечение прямой и параболы.
Взаимное расположение ломаной и параболы.
Взаимное расположение двух парабол.
Композиция тригонометрической функции и обратной тригонометрической функции.
Композиция обратной тригонометрической функции и тригонометрической функции.

3.15.2. Графические методы решения уравнений и неравенств. Окружности.

Графическое решение уравнений и систем уравнений, включающих уравнения окружностей, прямых, квадратов и других простейших фигур.
Пересечение прямой и окружности.
Взаимное расположение ломаной линии и окружности.
Взаимное расположение окружности и параболы.
Уравнение окружности с модулями.

3.16. Вычисление и применение производной.

3.16.1. Вычисление производной.

Определение, алгебраический и физический смысл производной.
Таблица производных. Правила вычисления производных.
Вычисление производной сложной функции.
Понятие о функциях, не имеющих производной в точке.
Определение интеграла, интегрирование функций (хотя бы многочленов).

3.16.2. Построение и применение касательных.

Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции.
Свойства касательной к параболе.
Свойства касательной к кубической параболе.
Свойства касательной к гиперболе.
Понятие касания графиков двух функций.

3.17. Применение производной для решения задач.

3.17.1. Точки экстремума функции.

Нахождение участков монотонности.
Исследование локальных экстремумов функции.
Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции.

3.17.2. Текстовые задачи.

Экстремальное значение суммы величин с заданным произведением.
Экстремальное значение произведения величин с заданной суммой.
Геометрическая интерпретация экстремальных задач.
Экстремальное значение квадратичной функции двух переменных.
Экстремальные задачи экономического содержания.
Геометрические экстремальные задачи.
Исследование количества корней уравнения с параметром.

3.17.3. Задачи, связанные с оптимизацией экономической деятельности.

Вычисление максимальной выручки при заданном объеме вложенных средств.

Вычисление наименьшего объема вложенных средств для достижения заданной величины выручки.

3.17.4. Задачи оптимизации экономической деятельности, решаемые с применением производной.

Задачи оптимизации экономической деятельности, приводящиеся к исследованию свойств квадратного трехчлена.

Задачи оптимизации экономической деятельности, приводящиеся к исследованию свойств степенных функций.

3.18. Планиметрические задачи, многоугольники, окружности.

3.18.1. Теоремы синусов и косинусов.

Теорема синусов.

Теорема косинусов.

Подобие треугольников.

3.18.2. Окружности.

Измерение углов и дуг, связанных с окружностью.

Вписанные углы, угол между касательной и хордой. Свойство пересекающихся хорд в окружности.

Свойство касательной и секущей.

Метрические соотношения в круге.

Пропорциональные отрезки, связанные с окружностью. Степень точки относительно окружности, радикальная ось, радикальный центр.

Вписанные и невписанные окружности. Точки Жергона и Нагеля.

Окружность девяти точек и прямая Эйлера.

Ортотреугольник и отражения ортоцентра. Лемма Фусса. Прямая Симсона.

Середины дуг: лемма Архимеда и лемма о трезубце.

3.18.3. Многоугольники.

Параллелограмм, ромб, прямоугольник, квадрат.

Трапеция.

Метрические соотношения в четырехугольниках общего вида.

Свойства четырехугольника, в который вписана окружность.

Свойства четырехугольника, вокруг которого можно описать окружность.

Параллелограмм Вариньона.

Вписанные четырехугольники и вспомогательные окружности.

Отрезки касательных и описанные четырехугольники.

Триангуляция многоугольника.

Многоугольники на решетке. Формула Пика.

3.18.4 Движения и преобразования, стереометрия

Движения плоскости: классификация, композиция движений, применение при решении задач.

Преобразования плоскости: гомотетия, поворотная гомотетия, изогональное сопряжение.

Стереометрические задачи. Равногранные и ортоцентрические тетраэдры

3.19. Обратная функция, сложная функция, функциональные уравнения.

3.19.1. Сложная функция.

Понятие сложной функции.

Вычисление области определения сложной функции.
Вычисление множества значений сложной функции.
Вычисление производной сложной функции.
Вычисление наибольшего и наименьшего значений сложной функции.

3.19.2. Обратная функция.

Понятие обратной функции.
Общие правила построения обратной функции.
Основные пары взаимно обратных функций: линейная, степенная, тригонометрические.

3.19.3. Множество значений сложной функции.

Множество значений композиции нескольких квадратных трехчленов.
Композиция квадратного трехчлена и тригонометрической функции.

3.20. Последовательности и прогрессии.

3.20.1. Арифметическая прогрессия.

Понятие и свойства арифметической прогрессии.
Вычисление суммы отрезка натурального ряда.
Вычисление суммы отрезка арифметической прогрессии.
Вычисление суммы множества натуральных чисел, определяемых свойствами делимости.

3.20.2. Геометрическая прогрессия.

Понятие и свойства геометрической прогрессии.
Вычисление суммы отрезка геометрической прогрессии.
Задачи на составление уравнений, связанных со свойствами геометрической прогрессии.
Задачи, в которых присутствуют одновременно арифметическая и геометрическая прогрессии.

3.20.3. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
Уравнения и неравенства, в которых присутствует сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

3.21. Теория вероятностей и комбинаторика.

3.21.1. Теория вероятностей

Случайные события. Среднее значение, медиана, отклонения, дисперсия.
Математическое описание случайных явлений. Элементарные события и их вероятность.
Правило вычисления вероятности.
Основы теории множеств: объединение, пересечение множеств, диаграммы Эйлера.
Применение теории множеств для вычисления вероятности. Вероятность противоположного события. Объединение и пересечение событий.
Формула сложения вероятностей для произвольного количества событий.
Правило умножения вероятностей для независимых событий.
Геометрическая вероятность. Задачи о выборе точки или нескольких точек внутри отрезка или квадрата. Применение геометрической модели для вычисления вероятности.

3.21.2. Комбинаторика и логика

Правило умножения и правило сложения в комбинаторике.
Основные задачи комбинаторики: подсчёт числа перестановок и сочетаний.
Рекуррентные соотношения. Составление рекуррентных соотношений в комбинаторных задачах. Решение линейных рекуррентных соотношений второго порядка.

Основы теории множеств в комбинаторике. Формула включений-исключений. Подсчёт числа элементов в множестве путём разбиения его на подмножества.

Понятие отображения множеств и взаимно-однозначного соответствия между двумя множествами. Решение комбинаторных задач с помощью установления взаимно-однозначных соответствий.

Полный перебор, грамотная организация перебора.

Идея упорядочивания в комбинаторных и алгебраических задачах.

Решения задач от противного и принцип Дирихле.

Принцип крайнего.

Круги Эйлера и формула включений-исключений.

Логические задачи. Анализ истинных и ложных высказываний. Таблицы истинности.

Задачи про рыцарей и лжецов. Задачи про мудрецов.

Четность: арифметика, разбиение на пары, чередование.

Процессы: инварианты и полуинварианты, заикливание, дискретная непрерывность.

Алгоритмы и конструктивы: переправы, переливания. Взвешивания и теория информации.

Метод математической индукции: задачи на постепенное конструирование, применение при решении задач разной природы: алгебра, комбинаторика, геометрия.

Подсчет числа способов. Задачи на соответствия. Правила сложения и умножения.

Факториал. Числа сочетаний, бином Ньютона и треугольник Паскаля. Алгебраические тождества с числами сочетаний и их комбинаторный смысл. Метод “шаров и перегородок”. Рекуррентные соотношения, производящие функции, числа Фибоначчи, числа Каталана.

Игры: симметричные стратегии, выигрышные и проигрышные позиции, передача хода.

Теория графов. Перевод условия задачи на язык графов. Лемма о рукопожатиях.

Связность. Двудольные графы и подсчет двумя способами. Деревья. Эйлеровы и гамильтоновы пути и циклы в графах. Раскраски графов. Планарные графы и формула Эйлера. Ориентированные графы.

4. Рекомендуемая литература и другие источники

Приведем список литературы и ресурсов в сети Internet, которые могут быть полезны в процессе подготовки. Хороших книг и отличных сайтов много, но мы предпочли сделать наш список как можно более компактным, чтобы он служил ориентиром того, на что, на наш взгляд, следует обратить внимание в первую очередь. Для того, чтобы сформировалась более цельная картина, мы не стали разбивать список на классы. Все ресурсы содержат адекватные описания, у вас не вызовет затруднения, изучая соответствующие материалы, понять целевую аудиторию конкретных мероприятий, курсов, литературы.

4.1. Информационные ресурсы и сайты олимпиад

- olimpiada.ru — крупнейший информационный портал об олимпиадах в России
- vos.olimpiada.ru — сайт с информацией об этапах Всероссийской олимпиады школьников в городе Москве
- siriusolymp.ru — сайт школьного этапа Всероссийской олимпиады, проводимого Образовательным центром «Сириус»
- rsr-olymp.ru — сайт Российского совета олимпиад школьников
- mcsme.ru — сайт Московского центра непрерывного математического образования
- turgor.ru — сайт Международного математического «Турнира городов»

- olympiads.mcsme.ru/matprazdnik — сайт «Математического праздника» для 6 и 7 классов
- mmo.mcsme.ru — сайт Московской математической олимпиады
- olymp.hse.ru/mmo — сайт олимпиады «Высшая проба»
- www.etudes.ru — сайт проекта «Математические этюды»

4.2. Дистанционные курсы

- edu.sirius.online — бесплатные онлайн-курсы Образовательного центра «Сириус»

4.3. Базы задач

- problems.ru — база задач с решениями, каталогизацией и поиском.
- zadachi.mcsme.ru — информационно-поисковая система «Задачи по геометрии»

4.4. Интернет–библиотеки

- ilib.mcsme.ru и mcsme.ru/free-books — библиотеки математической литературы. Ряд книг, перечисленных ниже, доступны бесплатно на этих ресурсах

4.5. Печатная учебная литература

- Серия книг «Школьные математические кружки»
- Сайт журнала «Квантик» kvantik.com
- Архив номеров журнала «Квант» kvant.mcsme.ru
- Р. К. Гордин. Это должен знать каждый матшкольник. mcsme.ru/free-books/pdf/gordin.pdf
- А. Канель-Белов, А. Ковальджи. Как решают нестандартные задачи mcsme.ru/free-books/olymp/KanKov.pdf
- «Ленинградские математические кружки» С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин
- Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. Алгебра и теория чисел для математических школ mcsme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf
- В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии mcsme.ru/free-books/prasolov/planim5.pdf
- В. В. Прасолов. Задачи по стереометрии
- В. В. Прасолов. Задачи по алгебре, арифметике и анализу mcsme.ru/free-books/prasolov/algebra.pdf
- В. В. Прасолов. Многочлены www.mcsme.ru/free-books/prasolov/poly.pdf
- А. В. Акопян. Геометрия в картинках mcsme.ru/free-books/akopyan/Akopyan.pdf
- Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, П. А. Виленкин Комбинаторика

4.6. Печатные сборники задач наиболее авторитетных математических олимпиад

- Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009 Заключительные этапы.
- В. В. Прасолов и др. Московские математические олимпиады 1935–1957 mcsme.ru/free-books/olymp/mmo-35-57.pdf
- В. В. Прасолов и др. Московские математические олимпиады 1958–1967
- А. В. Бегунц и др. Московские математические олимпиады 1981–1992
- Р. М. Федоров и др. Московские математические олимпиады 1993–2005 mcsme.ru/free-books/olymp/mmo1993.pdf
- Л. Э. Медников, А. В. Шаповалов Турнир городов: мир математики в задачах

- А. К. Толпыго Тысяча задач Международного математического Турнира городов
- Д. В. Фомин, К. П. Кохась Ленинградские математические олимпиады 1961–1991
- Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике. Серия книг с 2012 по 2021 годы.